

Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

- 1 Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D(g) \subset \mathbb{R}$.

Der Graph von g heißt $G(g)$. (Abitur 2006 AI)

Geben Sie $D(g)$ und die Nullstelle von g mit ihrer Vielfachheit an. Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen $G(g)$ und skizzieren Sie den Graphen $G(g)$ für $-6 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ○

- 2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit $G(f)$ bezeichnet. (Abitur 2006 AII)

- 2.1 Geben Sie $D(f)$ an, bestimmen Sie die Nullstellen von f und untersuchen Sie $G(f)$ auf Symmetrie. ○

- 2.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von $G(f)$ und geben Sie die Wertemenge $W(f)$ der Funktion f an. ☒

(Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{20x}{(1+x^2)^2}$)

- 2.3 Berechnen Sie $f(3)$ und $f(6)$ und zeichnen Sie $G(f)$ und seine Asymptoten für $-6 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Ganze DIN A4-Seite verwenden, Ursprung in der Blattmitte, 1 LE = 1 cm) ○

- 2.4.0 Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D(g) \subset \mathbb{R}$.

Ihr Graph heißt $G(g)$.

- 2.4.1 Ermitteln Sie $D(g)$, die Nullstellen von g , die Gleichungen der Asymptoten sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von $G(g)$. Beachten Sie dazu die Teilaufgaben 2.1 und 2.2. ☒

- 2.4.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von $G(f)$ und $G(g)$. ☒

- 2.4.3 Zeichnen Sie $G(g)$ und seine Asymptoten für $-6 \leq x \leq 6$ mit anderer Farbe in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 2.3. ○

- 3.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+1)(x-2)}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. (Abitur 2007 AI)

- 3.1 Geben Sie D_f , die Lage und Vielfachheiten der Nullstellen sowie Art und Lage der Definitionslücken der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücken. ○

3.2.0 Im Folgenden betrachten wir die stetige Fortsetzung der Funktion f

$$\bar{f}(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} \text{ mit } D_{\bar{f}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}. \text{ Ihr Graph ist } G_{\bar{f}}.$$

3.2.1 Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten von $G_{\bar{f}}$. ☐

3.2.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von $G_{\bar{f}}$. ☐

3.2.3 Zeichnen Sie $G_{\bar{f}}$ und seine Asymptoten mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte im Intervall $[-2;6]$ in ein Koordinatensystem. (LE: 1 cm) ☐

4.0 Gegeben ist die Funktion $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} - \frac{5}{(2x-4)^2}$ mit ihrer größtmöglichen

Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G_g . (Abitur 2007 All)

4.1 Geben Sie D_g sowie die Lage und die Art der Definitionslücke von g an und bestimmen Sie das Verhalten von $g(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücke. Weisen Sie nach, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle der Funktion g ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S_y von G_g mit der y -Achse. ☒
(Hinweis: g hat als einzige Nullstelle x_1)

4.2 Geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_g an und untersuchen Sie jeweils, ob sich der Graph G_g der schiefen Asymptote für $|x| \rightarrow \infty$ von oben oder von unten annähert. ☐

4.3 Zeichnen Sie die Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem und skizzieren Sie G_g unter Berücksichtigung der bisherigen Erkenntnisse in die Zeichnung. ☐

5.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{2(x-1)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2008 All)

5.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f und geben Sie deren Vielfachheiten an. Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung der Definitionslücke und geben Sie die Art der Definitionslücke an. ☐

5.2 Zeigen Sie: G_f besitzt eine schiefe Asymptote mit der Gleichung $a(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ und G_f verläuft für alle $x \in D_f$ unterhalb dieser schiefen Asymptote. ☒

5.3 Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und aller Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem. (Längeneinheit 1 cm) ☐

6.0 Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{4x+8}{x^2+4x+8}$ mit $D_g \subseteq \mathbb{R}$. (Abitur 2009 AI)

6.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_g und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Funktion g an. ☐

6.2 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion g und die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_g . ☐

6.3 Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-8 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. ☐

7.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{6-6x}{(x+1)^2}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge

$D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G_f . (Abitur 2009 AII)

7.1 Bestimmen Sie D_f und geben Sie die Achsenschnittpunkte von G_f sowie die Art der Definitionslücke von f an. Ermitteln Sie das Verhalten von $f(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücke. ☐

7.2 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_f an und untersuchen Sie, ob sich der Graph für $x \rightarrow +\infty$ seiner waagrechten Asymptote von oben oder unten annähert. ☒

7.3 Untersuchen Sie G_f auf Extrempunkte und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Art und Koordinaten. (Teilergebnis: $f'(x) = \frac{6x-18}{(x+1)^3}$) ☒

7.4 Zeichnen Sie die Asymptoten von G_f in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_f nur unter Berücksichtigung der bisherigen Erkenntnisse ohne Berechnung weiterer Funktionswerte in dieses Koordinatensystem. (1 LE = 1 cm) ☐

8.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2-x}{2x^2-5x+3}$ in der maximalen Definitionsmenge

$D_f \subset \mathbb{R}$. (Abitur 2010 AI)

8.1 Bestimmen Sie D_f und die Nullstelle von f und geben Sie die Art der Definitionslücken von f an. ☐

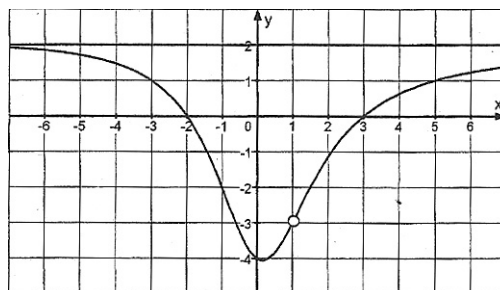
8.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{f}(x) = \frac{x}{2x-3}$ mit $D_{\tilde{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$ die stetige Fortsetzung

von f ist und ermitteln Sie die Intervalle, für die gilt: $\tilde{f}(x) > 0$ bzw. $\tilde{f}(x) < 0$. ☒

8.3 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f an, zeichnen Sie die Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie mithilfe der bisherigen

Ergebnisse den Graphen G_f von f in das Koordinatensystem. ☐

9 Die untenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochenrationalen Funktion g mit seiner Asymptote. Der Graph besitzt bei $(1/-3)$ ein „Loch“ und keine weiteren Definitionslücken. Alle Schnittstellen mit den Koordinatenachsen sind ganzzahlig.



Begründen Sie genau, zu welchem der nachfolgenden Funktionsterme der abgebildete Graph gehört. (Abitur 2010 All) ☒

$$g_1(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x-1)}$$

$$g_2(x) = \frac{2(x-2)(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2-1)}$$

$$g_3(x) = \frac{(x+2)(x-3)(x-1)}{0,5(x-1)^2(x+1)}$$

$$g_4(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x^2+3)(x-1)}$$

$$g_5(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x^2+2)(x-1)}$$

10.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2+3}{1-x}$ mit der maximalen Definitionsmenge

$D(f) \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist $G(f)$. (Abitur 2004 AI)

10.1 Geben Sie $D(f)$ an und untersuchen Sie f auf Nullstellen. ☐

10.2 Zeigen Sie, dass gilt: $f(x) = -x - 1 + \frac{4}{1-x}$, und geben Sie die Gleichung aller

Asymptoten des Graphen $G(f)$ an. ☐

10.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von f , ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von $G(f)$, und geben Sie die Wertemenge $W(f)$ von f an. ☐

(Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$)

10.4 Zeichnen Sie $G(f)$ und seine Asymptoten für $-3 \leq x \leq 5$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse sowie der Berechnung geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. (1 LE $\hat{=}$ 1 cm) ☐

11.0 Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{4x^2 - 2x - 5}{2x - 4}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D(g) \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion g heißt $G(g)$. (Abitur 2005 AI)

11.1 Geben Sie $D(g)$ an und bestimmen Sie das Verhalten von $g(x)$ in der Umgebung der Definitionslücke. Ermitteln Sie die Gleichungen und die jeweilige Art aller Asymptoten von $G(g)$. ○

11.2 Ermitteln Sie die Menge B der x -Werte, für welche $G(g)$ oberhalb der Geraden k mit der Gleichung $y = 2x + 3$ verläuft. ☒

12.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^2$ mit der maximalen Definitionsmenge $D(f) \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt $G(f)$. (Abitur 2005 AII)

12.1 Geben Sie $D(f)$ an und untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung der Definitionslücke. Geben Sie die Nullstelle von f an und beschreiben Sie den Verlauf von $G(f)$ in der Umgebung der Nullstelle. ☒

12.2 Bestimmen Sie die Wertemenge $W(f)$ von f . ☒

12.3 Ermitteln Sie die Art und Koordinaten des Extrempunktes von $G(f)$. ☒

12.4 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von $G(f)$ an und berechnen Sie $f(-3,75)$, $f(-1)$ und $f(0)$. Zeichnen Sie die Asymptoten und $G(f)$ nach Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte für $-12 \leq x \leq 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1 LE $\hat{=}$ 0,5 cm) ☒

12.5 Untersuchen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung von f , ob $G(f)$ für $x > 2$ einen Wendepunkt besitzt. ☒

12.6 Die Funktion $F(x)$ mit $D(F) = D(f)$ ist eine Stammfunktion von f . Geben Sie die Abszisse des Punktes an, in dem der Graph von F eine waagrechte Tangente besitzt, und bestimmen Sie die besondere Art dieses Punktes. ☒

13.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f . (Abitur 2011 AI)

13.1 Bestimmen Sie D_f , die Gleichungen aller Asymptoten von G_f und geben Sie die Nullstelle von f an. ○

13.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f . ○

13.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer Funktionswerte für $-2 \leq x \leq 7$ in ein Koordinatensystem.

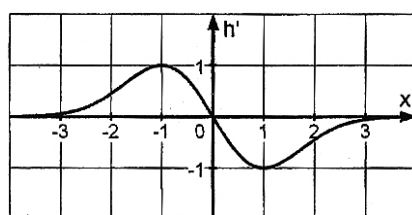
Maßstab: 1 LE = 1 cm ☐

14 Eine Funktion h sei auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. In der Abbildung ist der Graph der Ableitung h' dargestellt. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen zur Funktion h richtig, falsch oder nicht entscheidbar sind. Falls Sie sich für richtig oder falsch entscheiden, begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz. (Abitur 2011 AI) ☒

(1) $h(x) \leq 0$ für $0 \leq x \leq 3$

(2) An der Stelle $x = 0$ besitzt der Graph von h einen Hochpunkt.

(3) Der Graph von h besitzt bei $x = 1$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = 1$ ist.



15.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge

$D_f \subset \mathbb{R}$. Der zugehörige Graph heißt G_f . (Abitur 2011 AI)

15.1 Geben Sie D_f an, bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f und geben Sie die Gleichungen und Art aller Asymptoten an. ☐

15.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_f . ☒

(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-2x+8}{(x-1)^3}$)

15.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-6 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1 LE = 1 cm) ☐

16.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{2x^2 - 8x + 6}$ in der maximalen

Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. (Abitur 2012 AI)

16.1 Bestimmen Sie D_f und geben Sie die Nullstelle sowie die Art der Definitionslücke von f an. ☐

- 16.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{f}(x) = \frac{x+2}{2x-2}$ mit $D_{\tilde{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die stetige Fortsetzung von f ist. Untersuchen Sie das Verhalten von $\tilde{f}$ in der Umgebung ihrer Definitionslücke und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten des Graphen $G_{\tilde{f}}$ von $\tilde{f}$ ist. 
- 16.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von $G_{\tilde{f}}$ und geben Sie die Wertemenge von $\tilde{f}$ an. ☐
(Zur Kontrolle: $\tilde{f}'(x) = \frac{-3}{2(x-1)^2}$)
- 16.4 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen $G_{\tilde{f}}$ im Punkt $P(2/\tilde{f}(2))$ und bestimmen Sie die Koordinaten des weiteren Punktes R von $G_{\tilde{f}}$, in welchem der Graph $G_{\tilde{f}}$ die gleiche Steigung wie die Tangente t besitzt. 
- 16.5 Zeichnen Sie die Asymptoten und die beiden Tangenten in den Punkten P und R in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie $G_{\tilde{f}}$ mit Hilfe der vorliegenden Ergebnisse in die Zeichnung. ☐
- 16.6 Zeigen Sie, dass sich $\tilde{f}$ in der Form $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x-2}$ schreiben lässt, und ermitteln Sie die Flächenmaßzahl des Flächenstücks, das $G_{\tilde{f}}$ im III. Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt. 
- 17.0 Gegeben ist die reelle Funktion $g(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet. (Abitur 2012 All)
- 17.1 Geben Sie D_g an, berechnen Sie die Nullstelle von g und geben Sie deren Vielfachheit an. Untersuchen Sie das Verhalten von $g(x)$ an den Rändern von D_g und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an. ☐
- 17.2 Geben Sie gegebenenfalls unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 17.1 die Koordinaten des einzigen Extrempunktes von G_g an und ermitteln Sie dessen Art. ☐
- 17.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von g mit seiner waagrechten Asymptote. 
- 17.4 Zeichnen Sie die Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_g mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse in die Zeichnung. ☐

18.0 Gegeben ist die reelle Funktion f in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$ durch

$$f: x \mapsto \frac{x^2 - 5}{4 \cdot (x - 3)}. \text{ Ihr Graph wird mit } G_f \text{ bezeichnet. (Abitur 2013 AI)}$$

18.1 Bestimmen Sie D_f sowie die Nullstellen und die Art der Definitionslücke von f . ☐

18.2 Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung von f auch in der Form

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3} \text{ darstellen lässt und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von } G_f \text{ an. } \textcircled{/}$$

18.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f . Geben Sie auch die Wertemenge von f an. ☐

$$(\text{Teilergebnis: } f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{4(x-3)^2})$$

18.4 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-4 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. ☐

19.0 Eine gebrochenrationale Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f \subset \mathbb{R}$, hat eine Nullstelle bei $x = -1$, eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) ohne Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 1$ und eine stetig behebbare Definitionslücke an der Stelle $x = 4$. Der Graph von f hat ferner eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$. (Abitur 2013 AII)

19.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$, wenn der Nenner ein Polynom dritten Grades ist und außerdem gilt: $f(5) = 3$. ☐

19.2 Im Folgenden wird die stetige Fortsetzung g der Funktion f betrachtet:

$$g: x \mapsto \frac{8x+8}{(x-1)^2} \text{ mit } D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}. \text{ Der Graph von } g \text{ wird mit } G_g \text{ bezeichnet.}$$

Geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_g sowie die Nullstellen von g an. ☐

19.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_g und ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_g . ☐

$$(\text{Teilergebnis: } g'(x) = \frac{-8x-24}{(x-1)^3})$$

19.4 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_g mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-6 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie dazu weitere geeignete Funktionswerte. ☐

20.0 Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion $f: x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2}{2(x+2)^2}$ in ihrer maximalen

Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f . (Abitur 2014 All)

20.1 Geben Sie D_f und die Art der Definitionslücke an und bestimmen Sie die Nullstellen von f . Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von f bei Annäherung an die Definitionslücke. ☐

20.2 Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung von f auch darstellen lässt durch

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{(x+2)^2}.$$

Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von x der Graph G_f oberhalb bzw. unterhalb der schiefen Asymptote verläuft. ☒

20.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_f . ☒

(Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{2(x+2)^3}$)

20.4 Zeichnen Sie die Asymptoten von G_f für $-5 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_f in die Zeichnung. ☐

20.5 G_f , die x -Achse, die schiefe Asymptote und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > 1$ schließen ein Flächenstück ein. Schraffieren Sie das Flächenstück für $u = 3$ in der Zeichnung von Aufgabe 20.4 und ermitteln Sie die Maßzahl $A(u)$ des Flächeninhalts in Abhängigkeit von u .

Untersuchen Sie rechnerisch, ob $A(u)$ für $u \rightarrow \infty$ endlich ist. ☒

21.0 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $h: x \mapsto \frac{(x-1)(3x-0,5x^2)}{x^2-1}$ in ihrer

maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$. (Abitur 2015 AI)

21.1 Bestimmen Sie D_h sowie die Nullstellen von h und geben Sie die Art der Definitionslücken von h an. ☐

21.2.0 Im Folgenden wird die stetige Fortsetzung $f: x \mapsto \frac{-0,5x^2 + 3x}{x+1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ der Funktion h betrachtet (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph ist G_f .

21.2.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von f durch $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - \frac{3,5}{x+1}$ darstellen lässt und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an. ☐

21.2.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen. ○

$$(\text{Teilergebnis: } f'(x) = \frac{-0,5x^2 - x + 3}{(x+1)^2})$$

21.2.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-6 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. ○

22.0 Gegeben ist die reelle Funktion $h: x \mapsto \frac{(x^2+1)(1-x)}{x^2-3x+2}$ in der maximalen

Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$. (Abitur 2015 All)

22.1 Bestimmen Sie D_h und geben Sie die Lage und die Art der Definitionslücken von h an.
Untersuchen Sie h auf Nullstellen. Geben Sie die Funktionsgleichung der stetigen Fortsetzung von h an. ⦿

22.2.0 Betrachtet wird nun die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2+1}{2-x}$ in ihrer Definitionsmenge

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}. \text{ Ihr Graph ist } G_f.$$

22.2.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von f in der Form $f(x) = -x - 2 + \frac{5}{2-x}$ darstellen lässt.

Geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie das Verhalten von f bei Annäherung an die Definitionslücke. ○

22.2.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f . Runden Sie diese auf zwei Nachkommastellen. ○

$$(\text{Teilergebnis: } f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(2-x)^2})$$

22.2.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-5 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie für die Zeichnung eine ganze Seite. ○

23.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4x - 5}{2x + 4}$ in der maximalen Definitionsmenge

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}. \text{ Ihr Graph heißt } G_f. \text{ (Abitur 2016 AI)}$$

23.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und die Art der Definitionslücke. Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte in der Umgebung der Definitionslücke. ○

23.2 Ermitteln Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten von G_f und deren Art. ☐

(Teilergebnis: $f(x) = \frac{1}{2}x - 3 + \frac{7}{2x+4}$)

23.3 Bestimmen Sie die Art und Lage der Extrempunkte von G_f . Geben Sie deren Koordinaten auf zwei Dezimalstellen gerundet an. ☐

(Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 3}{2(x+2)^2}$)

23.4 Zeichnen Sie G_f und seine Asymptoten unter Verwendung bisheriger Ergebnisse für $-8 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ☐

23.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f bei $x = -1$, zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 23.4 ein und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente mit der schiefen Asymptote von G_f und der x -Achse einschließt. ☒

24.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 4 + \frac{8x-12}{(x-2)^2}$ mit der maximalen Definitionsmenge

$D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G_f . (Abitur 2016 All)

24.1 Geben Sie D_f an. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an. ☐

24.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der waagrechten Asymptote. ☐

24.3 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm auch in der Form $f(x) = \frac{4(x-1)^2}{(x-2)^2}$ darstellen

lässt und ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. ☐

24.4 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von f und ermitteln Sie daraus Art und Lage des Extrempunktes. ☒

(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-8x+8}{(x-2)^3}$)

24.5 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse für $-6 \leq x \leq 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ☐

25.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{2(x+1)^2}{x^2-1}$ mit der maximalen Definitionsmenge

$D_g \subset \mathbb{R}$. (Abitur 2017 AI)

25.1 Geben Sie D_g an, überprüfen Sie g auf Nullstellen und folgern Sie daraus die Art der Definitionslücken. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Definitionslücken. ☐

25.2.0 Die Funktion $f: x \mapsto \frac{2(x+1)}{x-1}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist die stetige Fortsetzung der Funktion g (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

25.2.1 Geben Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie, ob sich der Graph der Funktion f für $x \rightarrow \infty$ der Asymptote von oben oder unten nähert. ☒

25.2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f und geben Sie die Wertemenge von f an. ☐

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$)

25.2.3 Zeichnen Sie G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse für $-4 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ☐

25.2.4 Der Graph G_f , die y -Achse und die Geraden $y = 2$ und $x = a$ mit dem reellen Parameter $a < -1$ begrenzen ein Flächenstück A . Kennzeichnen Sie diese Fläche für $a = -3$ im Koordinatensystem von Teilaufgabe 25.2.3 und berechnen Sie deren Flächenmaßzahl $A(a)$ in Abhängigkeit von a . ☒
(mögliches Ergebnis: $A(a) = 4 \ln(1-a)$)

25.2.5 Untersuchen Sie, ob $A(a)$ für $a \rightarrow -\infty$ einen endlichen Wert annimmt. ☒

25.2.6 Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f . Geben Sie nur mit den bisherigen Ergebnissen die maximalen Monotonieintervalle des Graphen der Funktion F für $x < 1$ an. ☒

26.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x^3}$ mit der maximalen Definitionsmenge

$D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2017 AII)

26.1 Geben Sie D_f und die Art der Definitionslücken von f an und bestimmen Sie die Nullstelle von f . ☐

26.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern von D_f und geben Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten von G_f an. ☐

26.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_f . 

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-4x-3}{x^4}$)

26.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und mittels geeigneter zusätzlicher Funktionswerte G_f für $-5 \leq x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 

26.5 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch durch $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ darstellen lässt und bestimmen Sie eine Stammfunktion F der Funktion f mit $D_F = D_f$. 

26.6 Der Graph G_f , die Geraden $x = 1$, $x = b$ ($b > 1$) und die x -Achse schließen ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für $b = 4$ im Koordinatensystem der Teilaufgabe 26.4. Zeigen Sie, dass sich für die Maßzahl des

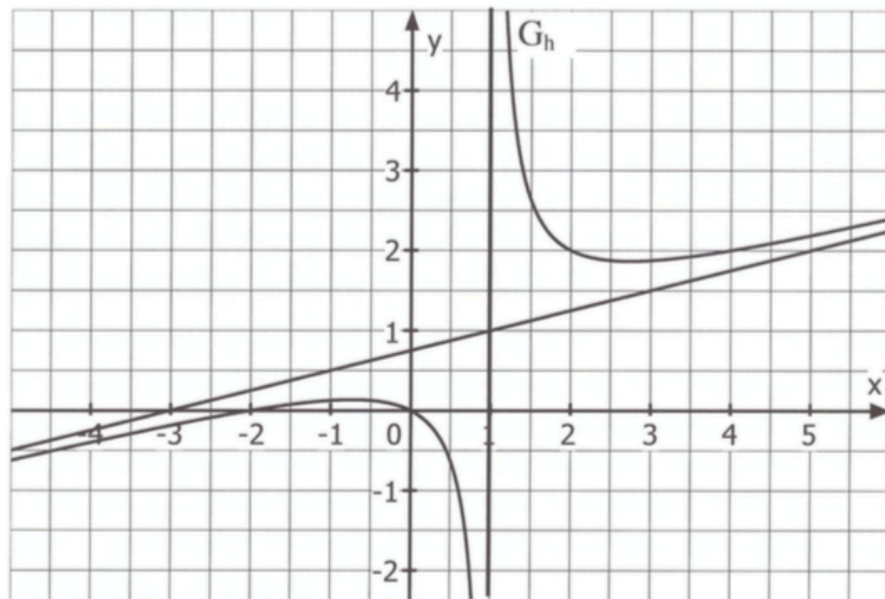
Flächeninhalts $A(b) = -\frac{2}{b} - \frac{0,5}{b^2} + 2,5$ ergibt. Bestimmen Sie den Grenzwert von $A(b)$ für $b \rightarrow \infty$. 

27.0 Die Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion

$$h: x \mapsto h(x) = 0,25x + 0,75 + \frac{a}{x+b}, \quad D_{h,\max} \subset \mathbb{R} \text{ mit seiner schiefen Asymptote}$$

$y = 0,25x + 0,75$ und der weiteren Asymptote $x = 1$. Es gilt $a, b \in \mathbb{R}$.

Alle abzulesenden Werte sind ganzzahlig. (Abitur 2018 AI)



27.1 Aus der Gleichung der schiefen Asymptote können

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - (0,25x + 0,75)) \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) \text{ gefolgert werden.}$$

Geben Sie diese Grenzwerte an und begründen Sie Ihre Ergebnisse. 

27.2 Für diese Teilaufgabe gilt $x > 1$. Lesen Sie aus der Abbildung die Lösungsmenge der Ungleichung $h(x) < 2$ ab. ☒

27.3 Bestimmen Sie die Parameter a und b und geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion h an. ☒

28.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{2(x-3)(x-2)}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$. (Abitur 2018 All)

28.1 Ermitteln Sie die Art der beiden Definitionslücken. ☒

28.2 Zeigen Sie, dass gilt: $(x^3 - 3x^2 + 4):(x-2) = x^2 - x - 2$.
Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen. ☐

28.3.0 Im Folgenden wird die Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ betrachtet. Ihr Graph heißt G_g .

28.3.1 Stellen Sie durch geeignete Umformung den Zusammenhang zwischen den Funktionen f aus 28.0 und g aus 28.3.0 her. Geben Sie die Bedeutung der Funktion g für die Funktion f an. ☒

28.3.2 Geben Sie die Nullstellen von g und die Gleichungen sowie die Art der Asymptoten des Graphen G_g an. ☐

28.3.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion g und geben Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_g an. ☒
(mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2}$)

28.3.4 Zeichnen Sie G_g mit seinen Asymptoten für $-2 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ☐

28.3.5 Bestimmen Sie die Wertemenge der Ableitungsfunktion g' . ☒

29.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{0,5x^2 - 3x + 0,5}{x^2 + 1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2019 AI)

29.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen. ☐

29.2 Geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an und bestimmen Sie die Koordinaten möglicher gemeinsamer Punkte der Graphen G_f mit seiner Asymptote. ☐

29.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f . ☐

$$\left[\text{Mögliches Teilergebnis: } f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2} \right]$$

29.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptote im Bereich $-4 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ☐

29.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto 0,5x - 1,5 \cdot \ln(x^2 + 1)$ mit $D_f = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. ☒

29.6 Der Graph der Funktion f , seine Asymptote und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung der Teilaufgabe 29.4 und berechnen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts. ☒

29.7 Es gilt $\int_{-3}^3 (0,5 - f(x)) dx = 0$ (Nachweis nicht nötig!).

Deuten Sie dieses Ergebnis geometrisch. ☒

30.0 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x^2 + 2x}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$. (Abitur 2019 All)

30.1 Bestimmen Sie D_h , prüfen Sie h auf Nullstellen und folgern Sie daraus die Art der Definitionslücken. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Definitionslücken. ☒

30.2.0 Die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist die stetige Fortsetzung der Funktion h (Nachweis nicht erforderlich!). Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

30.2.1 Zeigen Sie, dass sich die Gleichung der Funktion f auch in der Form $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 2}$ darstellen lässt und geben Sie jeweils die Gleichung und die Art aller Asymptoten von G_f an. ☐

30.2.2 Untersuchen Sie, ob sich der Graph G_f für $x \rightarrow \infty$ von oben oder von unten der schiefen Asymptote annähert. ☐

30.2.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f . ☐

$$\left[\text{Mögliches Teilergebnis: } f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} \right]$$

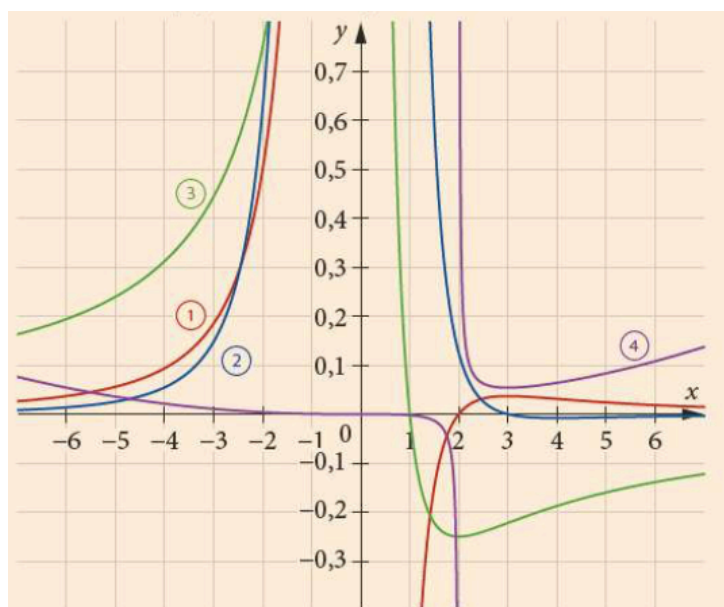
30.2.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten für $-4 \leq x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ☐

30.2.5 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^4 (f(x) - (x+1)) dx$ auf zwei Nachkommastellen gerundet und schraffieren Sie die zugehörige Fläche im Koordinatensystem der Teilaufgabe 30.2.4. ☒

31 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{x-2}{x^3}$, die Graphen der

Ableitungsfunktion f' , einer Stammfunktion F von f und der Funktion h mit $h(x) = \frac{0,002}{f(x)}$.

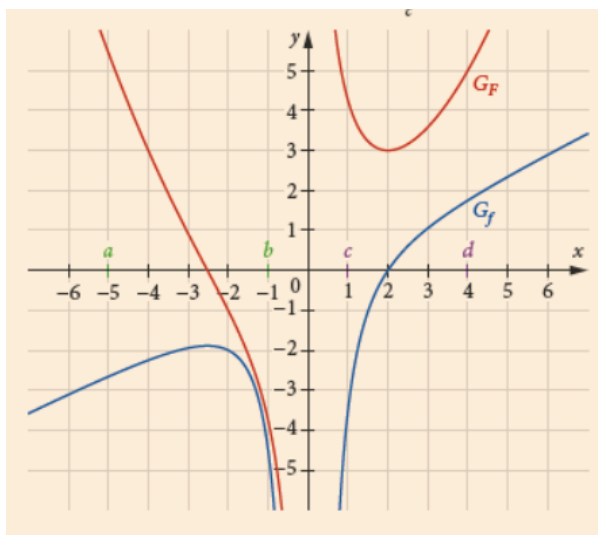
Begründen Sie für jeden der Graphen, ob er zu den Funktionen f , f' , F oder h gehört. ☒



- 32 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer Funktion f sowie den Graphen G_F einer zu f gehörenden Stammfunktion F (mit $C = 0$). Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe von G_f

die Integrale $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_c^d f(x)dx$. 

Entnehmen Sie dazu die Integrationsgrenzen der Abbildung. Beschreiben Sie in Worten, welche anschauliche Bedeutung das Integral $\int_c^d f(x)dx$ besitzt.

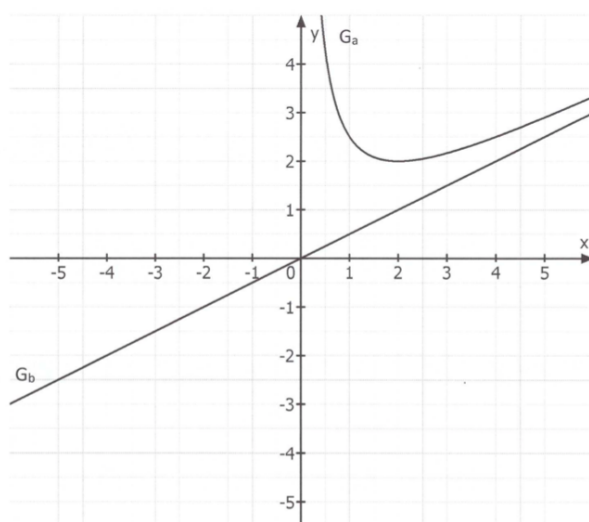


- 33.0 Gegeben sind die Funktionen $a: x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$ mit $D_a = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b: x \mapsto \frac{1}{2}x$ mit $D_b = \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion a heißt G_a und der Graph der Funktion b heißt G_b .

In der Abbildung ist ein Teil des Graphen G_a für $x > 0$ und der Graph G_b dargestellt.

G_b ist die schräge Asymptote von G_a . (Abitur 2020 Teil 1)



- 33.1 Zeigen Sie, dass der vollständige Graph G_a punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. 

33.2 Geben Sie die Art und die ganzzahligen Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_a an und zeichnen Sie G_a für $x < 0$ in das Koordinatensystem von 33.0 ein. ○

33.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_a im Punkt $P(1|a(1))$. ○

34 Von einer gebrochenrationalen Funktion c mit der Definitionsmenge $D_c = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

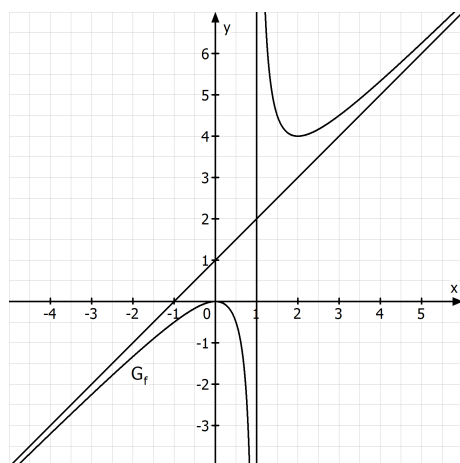
und ihren Graphen G_c sind die folgenden Eigenschaften bekannt:

- Die Funktion c hat eine Unendlichkeitsstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x = 1$.
- Die Funktion c hat eine stetig behebbare Definitionslücke bei $x = -1$.
- Die Funktion c hat eine einzige Nullstelle $x = 2$ mit der Vielfachheit 2.
- Es gilt: $P(-3|5) \in G_c$

Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion c so, dass die genannten Eigenschaften erfüllt sind. (Abitur 2020 Teil 1) ⓧ

35.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Der Graph der Funktion f heißt G_f . Untenstehende Abbildung zeigt einen Teil von G_f mit seinen beiden Asymptoten. (Abitur 2020 Teil 2 AI)



35.1 Bestätigen Sie die schiefe Asymptote von G_f und die Nullstelle von f durch Rechnung. ○

35.2 Geben Sie mithilfe der Abbildung die maximalen Monotonieintervalle sowie die Wertemenge der Funktion f an. Entnehmen Sie hierzu der Abbildung ganzzahlige Werte. ○

36.0 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto h(x) = \frac{3x^2 - 2x}{-2x^3 + 4x}$ mit der maximalen Definitionsmenge

$D_h \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion h heißt G_h . (Abitur 2020 Teil 2 AII)

36.1 Bestimmen Sie D_h , die Nullstellen von h und geben Sie die Art der Definitionslücken von h an. ⓧ

36.2 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_h an. ☐

36.3.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x) = \frac{3x-2}{-2x^2+4}$ mit der maximalen Definitionsmenge

$D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f heißt G_f .

36.3.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f an und zeigen Sie, dass $h(x) = f(x)$ für alle $x \in D_h \cap D_f$ gilt. ☐

36.3.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen G_f . ☐

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{6x^2 - 8x + 12}{(2x^2 - 4)^2}$)

36.3.3 Zeichnen Sie die Asymptoten von G_f in ein kartesisches Koordinatensystem und fertigen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte eine Skizze von G_f an. ☐

36.3.4 Erstellen Sie eine Wertetabelle der ersten Ableitungsfunktion f' für $-0,5 \leq x \leq 1,25$ mit der Schrittweite $\Delta x = 0,25$ auf zwei Nachkommastellen gerundet. Begründen Sie mithilfe der Wertetabelle, dass G_f einen Wendepunkt besitzen muss. Entscheiden Sie, in welchem Quadranten dieser Wendepunkt liegt und begründen Sie diese Entscheidung. ☒

37 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{(x+2)(x-2)}{-x(x-2)}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge

$D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

Geben Sie D_g sowie die Art der Definitionslücken von g an und untersuchen Sie g auf Nullstellen. Geben Sie auch jeweils die Art und die Gleichung aller Asymptoten von an. (Abitur 2021 Teil 1) ☐

38.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{6x+12}{x^2+4x+6}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der zugehörige Graph wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2021 AI)

38.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote von G_f . ☐

38.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f .

Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen. ○

(Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-6x^2 - 24x - 12}{(x^2 + 4x + 6)^2}$)

38.3 Gegeben ist die zweite Ableitungsfunktion f'' durch die Gleichung

$$f''(x) = \frac{12(x+2) \left[x - (-2 - \sqrt{6}) \right] \left[x - (-2 + \sqrt{6}) \right]}{(x^2 + 4x + 6)^3} \quad \text{mit der Definitionsmenge } D_{f''} = \mathbb{R}$$

(Nachweis nicht erforderlich!). Begründen Sie, dass die Funktion f drei Wendestellen besitzt. Lesen Sie die x -Koordinaten der Wendepunkte von G_f ab und geben Sie diese an. Bestimmen Sie die y -Koordinaten auf zwei Nachkommastellen gerundet. ⚡

38.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-9 \leq x \leq 5$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. ○

39.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-x^2 - x - 1}{x}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2021 All)

39.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f bei links- und rechtsseitiger Annäherung an die Definitionslücke $x = 0$ und ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f . ○

39.2 Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen besitzt. ○

39.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie die Art und Koordinaten aller Extrempunkte von G_f . ○

(Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$)

39.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie alle Asymptoten für $-5 \leq x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ○

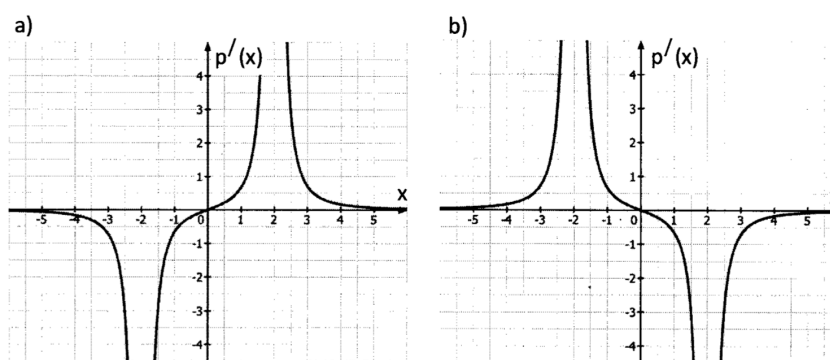
40.0 Gegeben ist die Funktion p durch $p(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge

$D_p = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Der Graph der Funktion p wird mit G_p bezeichnet. (Abitur 2022 Teil 1)

40.1 Untersuchen Sie, ob G_p eine Symmetrie zum Koordinatensystem besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an. ☐

40.2 Bestimmen Sie die Art der Definitionslücken von p sowie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_p mit den Koordinatenachsen. Geben Sie auch für jede Asymptote des Graphen G_p die Art und die Gleichung an. ☐

40.3 Eine der folgenden zwei Abbildungen zeigt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion p' der Funktion p . Nennen Sie den Buchstaben des richtigen Graphen und begründen Sie Ihre Wahl durch ein Argument. ☒



41.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{-2x + 4}$ mit ihrer maximalen

Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
(Abitur 2022 AI)

41.1 Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen besitzt und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f bei links- und rechtsseitiger Annäherung an die Definitionslücke. Geben Sie die Art der Definitionslücke an. ☐

41.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Gleichung aller Asymptoten von G_f . ☐

(mögliches Teilergebnis: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{4}{-2x + 4}$)

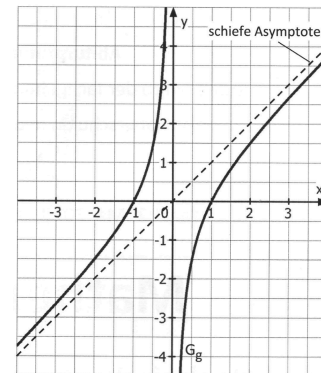
41.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie jeweils die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f . ○

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-2x^2 + 8x}{(-2x + 4)^2}$)

41.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie alle Asymptoten für $-6 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Geben Sie die Wertemenge der Funktion f an. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm ○

42.0 Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer gebrochenrationalen Funktion g mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Der Graph G_g ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, besitzt keine lokalen Extrempunkte und hat genau eine schiefe und genau eine senkrechte Asymptote. (Abitur 2023 Teil 1)



42.1 Lesen Sie die Nullstellen der Funktion g und die Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_g ab und geben Sie diese an. ○

42.2 Gegeben ist: $\left| \int_{-3}^{-2} g(x) dx \right|$.

Dieser Wert kann geometrisch als Inhalt einer Fläche im Koordinatensystem von 42.0 interpretiert werden. Kennzeichnen Sie dieses zugehörige Flächenstück im Koordinatensystem oben. ⓧ

42.3 Begründen Sie, dass der Graph $G_{g'}$ der Ableitungsfunktion g' die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 1$ besitzt. Zeichnen Sie sämtliche Asymptoten von $G_{g'}$ in das Koordinatensystem von 42.0 ein und skizzieren Sie $G_{g'}$ in dieses Koordinatensystem. ⓧ

42.4 G ist eine Stammfunktion von g mit $D_G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph der Stammfunktion G wird

mit G_G bezeichnet. Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch ist.

Hinweis: Setzen Sie Ihr Kreuz nur bei denjenigen Aussagen, bei denen Sie sicher sind.

Jedes falsch gesetzte Kreuz geht mit -0,5 BE und jedes richtig gesetzte Kreuz mit +1 BE ein. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet. 

Aussage	wahr	falsch
G_G besitzt ein relatives Maximum an der Stelle $x = -1$.		
G_G ist streng monoton steigend im Intervall $] -\infty ; 0 [$.		
G_G ist linksgekrümmt im Intervall $] 0 ; +\infty [$.		
$G(3) - G(1) < 5$		

43.0 Betrachtet wird die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^3 - x}{4 - x^2}$

mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

Nebstehende Abbildung zeigt einen

Ausschnitt des Graphen G_f der Funktion f .

(Abitur 2023 All)

43.1 Bestimmen Sie D_f sowie die Nullstellen von f und geben Sie jeweils die Art der Definitionslücken von f an. ☐

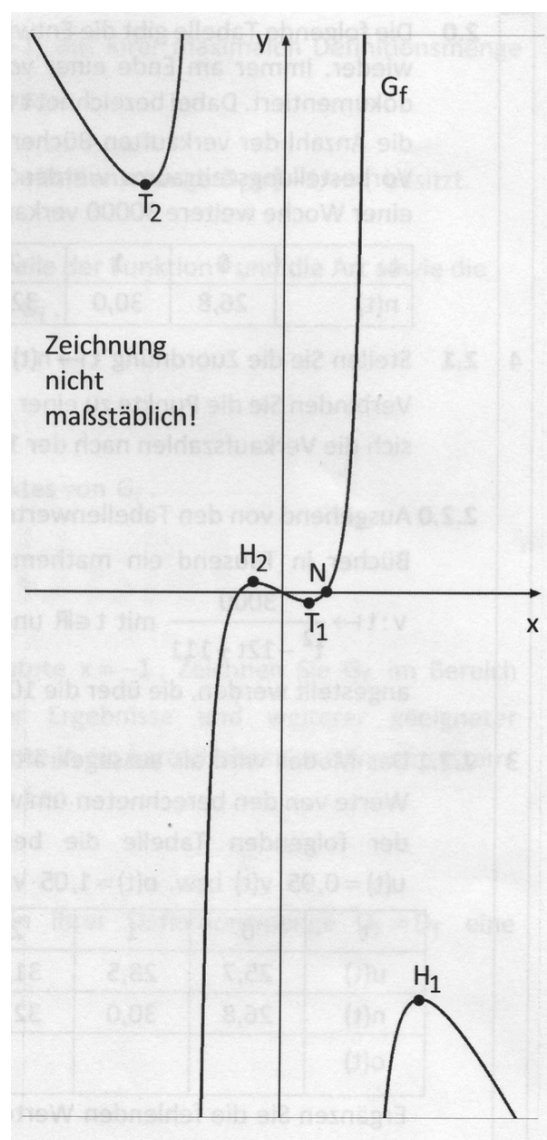
43.2 G_f besitzt genau vier lokale Extrempunkte. Die Koordinaten der beiden Extrempunkte H_1 und T_1 ergeben sich auf zwei Nachkommastellen gerundet zu $H_1(3,26 | -4,74)$ bzw. $T_1(0,61 | -0,11)$.

Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f punktsymmetrisch zum Ursprung ist und geben Sie anschließend die gerundeten Koordinaten der Extrempunkte H_2 und T_2 an. ☐

43.3 Ermitteln Sie für jede Asymptote von G_f ihre Art und ihre Gleichung. ☐

43.4 G_f schneidet die x -Achse für $x > 0$ im Punkt N (siehe Abbildung). Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt N . 

(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-x^4 + 11x^2 - 4}{(4 - x^2)^2}$)



43.5 Gegeben sind die Gleichungen der zweiten, dritten und vierten Ableitungsfunktion der

$$\text{Funktion } f: f''(x) = \frac{6(x^3 + 12x)}{(4 - x^2)^3}; f'''(x) = \frac{18(x^4 + 24x^2 + 16)}{(4 - x^2)^4}; f^{(4)}(x) = \frac{72(x^5 + 40x^3 + 80x)}{(4 - x^2)^5}$$

(Nachweis nicht erforderlich!). Es gilt: $D_f = D_{f''} = D_{f'''} = D_{f^{(4)}}$.

Untersuchen Sie die vierte Ableitungsfunktion $f^{(4)}$ auf Nullstellen. Tragen Sie ausgehend von den gegebenen Ableitungen die fehlenden Zahlen in die leeren Kästchen im Term der fünften Ableitungsfunktion $f^{(5)}$ ein:

$$f^{(5)}(x) = \frac{\square(x^\square + 60\square + 240x^\square + 64)}{(4 - x^2)^\square}.$$

44.0 Gegeben ist die Funktion f

$$\text{durch die Gleichung } f(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

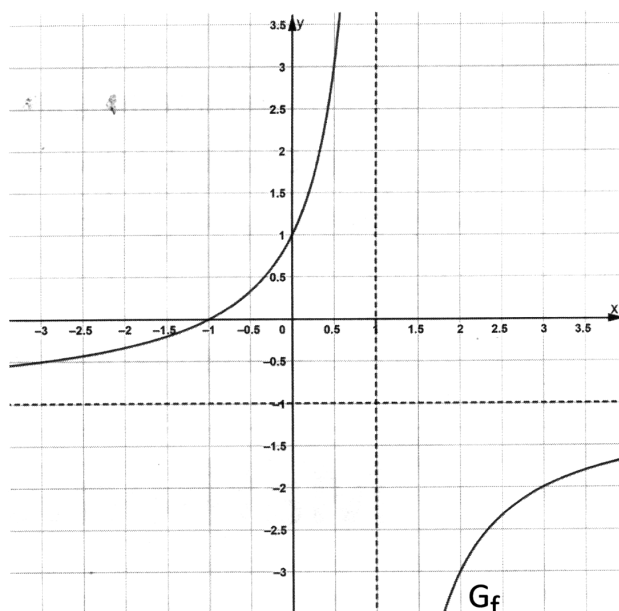
mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Der Graph der

Funktion f heißt G_f . Die

Abbildung zeigt einen Teil

von G_f mit seinen beiden

Asymptoten. (Abitur 2024 AI)



44.1 Lesen Sie jeweils die Art und die Gleichung der Asymptoten von G_f ab und geben Sie diese an. ☐

44.2 Gegeben ist die Funktion g durch die Gleichung $g(x) = -x$ mit $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion g heißt G_g . Zeichnen Sie G_g in die obige Abbildung ein und berechnen Sie die exakten x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g . ☐

(Teilergebnis: $x = 1 + \sqrt{2}$)

44.3 Gegeben sind die bestimmten Integrale $\int_1^{1+\sqrt{2}} (-1 - g(x)) dx$ und $\int_{1+\sqrt{2}}^3 (-1 - f(x)) dx$.

Die Integralwerte können jeweils geometrisch als Flächenmaßzahl eines Flächenstücks im Koordinatensystem von 44.0 interpretiert werden. Kennzeichnen Sie die beiden Flächenstücke in 44.0. ☐

45.0 Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$ mit ihrer maximalen

Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

(Abitur 2024 All)

45.1 Zeigen Sie, dass $f(x)$ zu jedem der beiden folgenden Terme äquivalent ist: ☐

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^2}$$

$$x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

Hinweis: Für alle drei Darstellungsformen der Funktion f gilt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Nachweis nicht erforderlich).

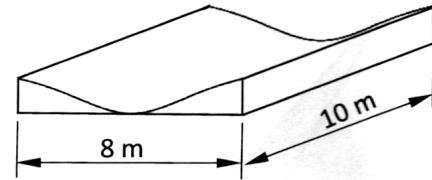
45.2 Geben Sie die Nullstellen von f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an. ☐

45.3 Geben Sie zu jeder Asymptote von G_f deren Art und Gleichung an. ☐

45.4 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und geben Sie die Art seines einzigen lokalen Extrempunktes an. ☐

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3}$)

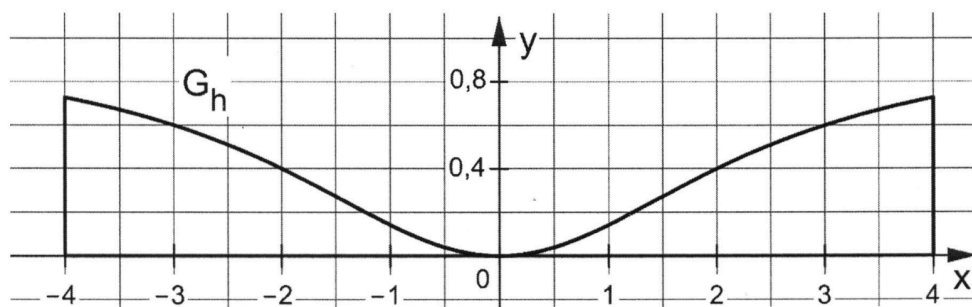
- 46.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein 8 m breites und 10 m langes Kinderbecken, welches an der Vorder- und Rückseite wasserdicht verschlossen ist (nicht in der Abbildung dargestellt).



Die untenstehende Skizze zeigt in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft den Querschnitt des Kinderbeckens, dessen obere Begrenzungslinie durch den Graphen

G_h der Funktion $h: x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 6}$ mit der Definitionsmenge $D_h = [-4; 4]$ beschrieben wird.

Die Koordinaten x und y sind Längenangaben mit der Einheit Meter. Bei Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle. (Abitur 2025 AI)



- 46.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass G_h symmetrisch zur y -Achse verläuft. ○

- 46.2 Laut einer neuen Verordnung darf der Boden von Kinderbecken eine maximale Steigung von 30 % nicht überschreiten. Überprüfen Sie, ob die neue Verordnung eingehalten wird. ⓧ

(mögliche Teilergebnisse: $h'(x) = \frac{12x}{(x^2 + 6)^2}$ $h''(x) = \frac{-36x^2 + 72}{(x^2 + 6)^3}$)

- 46.3 Das bestimmte Integral $\int_{-2}^2 (0,4 - h(x)) dx$ kann geometrisch als Maßzahl eines

Flächenstücks im Koordinatensystem von 46.0 interpretiert werden. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in 46.0 und schätzen Sie den Wert der zugehörigen Flächenmaßzahl durch geometrische Betrachtung näherungsweise ab.

Die maximale Wassertiefe im Kinderbecken soll 0,40 m betragen. Ermitteln Sie mithilfe Ihres Schätzwertes einen Näherungswert für das dafür benötigte Wasservolumen in m^3 . ⓧ

47.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-x^2 - 5}{x^3 - 5x}$ mit ihrer Definitionsmenge

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}; 0; \sqrt{5}\}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

(Abitur 2025 All)

47.1 Untersuchen Sie, ob G_f eine Symmetrie zum Koordinatensystem besitzt. ☐

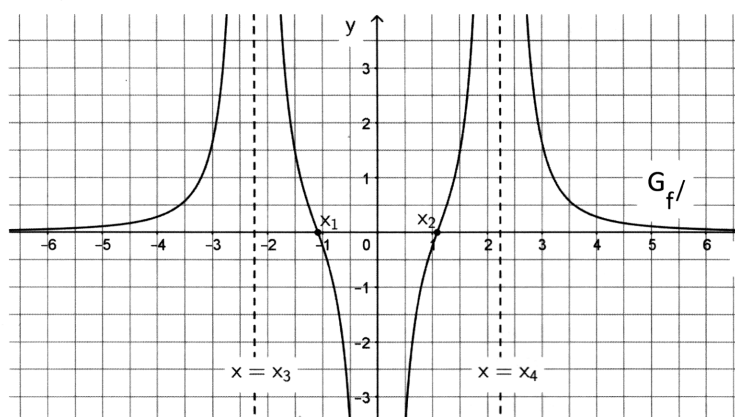
47.2 Ermitteln Sie die exakten Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f' mit der Definitionsmenge $D_{f'} = D_f$. ☒

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^4 + 20x^2 - 25}{(x^3 - 5x)^2}$)

47.3 Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{f'}$ der Funktion f' .

Alle Nullstellen und Definitionslücken von f' sind in der Abbildung ersichtlich. Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie jeweils die Art aller relativen Extremstellen von f an.

Hinweis: Anstelle der exakten Zahlenwerte können bei der Angabe der Intervalle die in der Abbildung ersichtlichen Bezeichnungen x_1 , x_2 , x_3 und x_4 verwendet werden. ☐

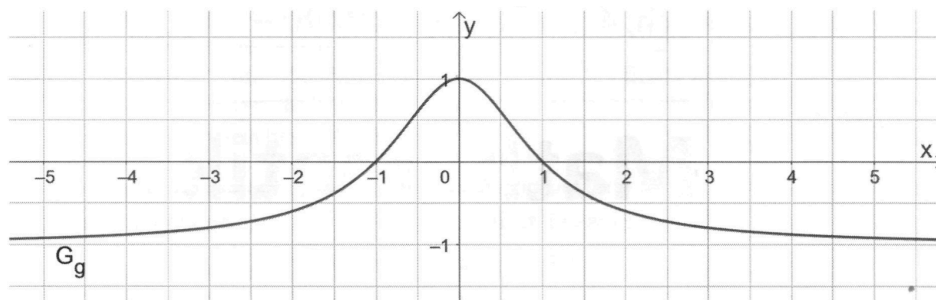


48 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-x(x+2)}{(x+2)(x-2)^2}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge

$D_f \subseteq \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Geben Sie die maximale Definitionsmenge G_f , die jeweilige Art aller Definitionslücken von f , die Nullstelle von f sowie jeweils Art und Gleichung aller Asymptoten von G_f an.
(Abitur 2025 Teil 1) ☐

- 49.0 Die Abbildung zeigt den Ausschnitt des Graphen einer gebrochenrationalen Funktion g mit $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet. Die Funktion g besitzt genau zwei Nullstellen. Diese sind ganzzahlig. Der Graph G_g hat den absoluten Hochpunkt $H(0|1)$. (Abitur 2025 Teil 1)



- 49.1 Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Terme Werte haben, die größer, kleiner oder gleich Null sind:
Hinweis: Jede falsch beantwortete Aussage wird mit -0,5 BE und jede richtig bewertete Aussage mit +1 BE gewertet. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE gewertet. 

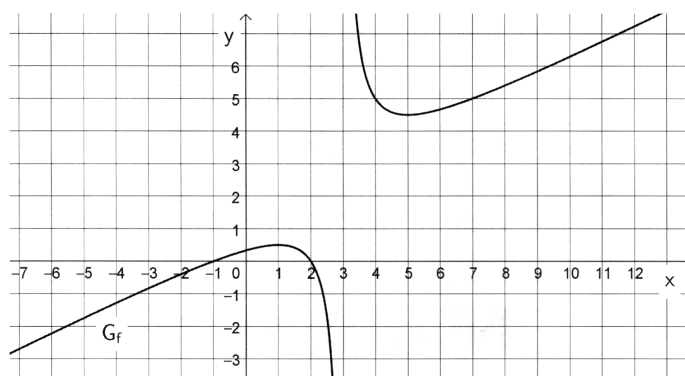
Terme	< 0	= 0	> 0
$g'(0)$			
$g''(0)$			
$\int_{-1}^1 g(x) dx$			

- 49.2 In Abhängigkeit des Funktionsterms $g(x)$ der Funktion g werden weitere Terme wie folgt

definiert: $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ $j(x) = x^2 \cdot e^{g(x)}$

Die zugehörigen Funktionen h und j haben jeweils die maximale Definitionsmenge $D_h \subseteq \mathbb{R}$ und $D_j \subseteq \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mithilfe des Graphen G_g diese zwei Definitionsmengen. 

50.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{(x+1)(x+2)}{2x-6}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt ihres Graphen G_f . (Abitur 2026 Teil 1)



50.1 Geben Sie D_f und die Gleichung der senkrechten Asymptote von G_f an. Ermitteln Sie auch die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse. ☐

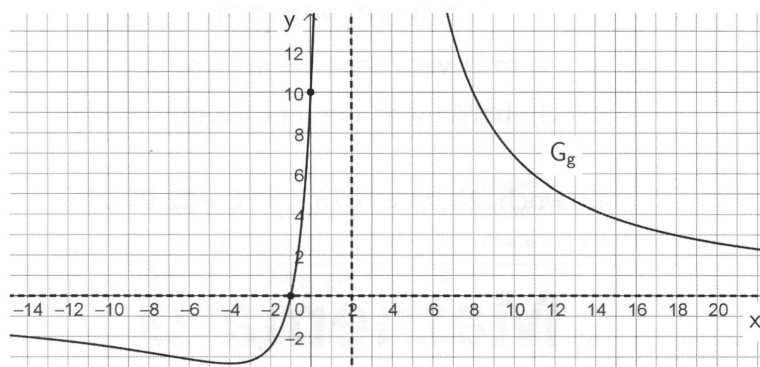
50.2 Berechnen Sie die Gleichung der schrägen Asymptote von G_f . Untersuchen Sie anschließend rechnerisch, ob sich G_f für $x \rightarrow +\infty$ der schrägen Asymptote von oben oder unten nähert. Zeichnen Sie alle Asymptoten von G_f in das Koordinatensystem aus 50.0 ein. ☐

50.3 F ist eine Stammfunktion von f mit $D_F = D_f$. Ihr Graph wird mit G_F bezeichnet. Entscheiden Sie, ob die folgenden fünf Aussagen wahr (w), falsch (f) oder nicht entscheidbar (n. e.) sind. Nutzen Sie hierfür die Grafik aus 50.0. Hinweis: Jede falsch beantwortete Aussage wird mit -0,5 BE und jede richtig beantwortete Aussage mit +1 BE gewertet. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE gewertet. ☐

Aussage	w	f	n. e.
G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty; 1]$.			
G_f hat bei $x = 2$ einen relativen Hochpunkt.			
Der Wert $\int_{-2}^2 f(x) dx$ ist negativ.			
Für $x \rightarrow +\infty$ gilt: $F(x) \rightarrow 0,5$.			
G_f verläuft durch den Koordinatenursprung.			

51.0 Nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_g einer gebrochenrationalen Funktion g mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Alle Asymptoten von G_g und alle Schnittpunkte von G_g mit den Koordinatenachsen sind in der Abbildung gekennzeichnet. Ganzzahlige Werte dürfen der Abbildung entnommen werden. (Abitur 2026 AI)



51.1 Bestimmen Sie für die Funktion g einen möglichen Funktionsterm $g(x)$ und erläutern Sie dabei nachvollziehbar Ihr Vorgehen. ☐

Für die folgenden Teilaufgaben ist nun zusätzlich bekannt: Die Funktion g besitzt genau eine Extremstelle, und zwar bei $x = -4$. Außerdem besitzt g auch genau eine Wendestelle, und zwar bei $x = -7$.

51.2 Geben Sie mithilfe der Abbildung und anhand der weiteren vorliegenden Informationen über die Funktion g die maximalen Monotonie- und Krümmungsintervalle von G_g an. ☐

51.3 Der Graph der Funktion g , die x -Achse und die y -Achse schließen im zweiten Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Abbildung aus 51.0 und ermitteln Sie die Maßzahl dieses Flächenstücks auf zwei Nachkommastellen gerundet. Verwenden Sie hierfür ohne Nachweis, dass die Funktion

$$G: x \mapsto 40 \cdot \left(\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} \right) \text{ mit } D_G = \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ eine Stammfunktion von } g \text{ ist. } \quad \textcircled{}$$

52.0 Gegeben ist die Funktion $p: x \mapsto \frac{2x^2 - 36x + 178}{x^2 - 16x + 73}$ mit ihrer Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$.

Der zugehörige Graph wird mit G_p bezeichnet. (Abitur 2026 AII)

52.1 Untersuchen Sie die Funktion p auf Nullstellen und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von p bei Annäherung an die Ränder von D_p . Geben Sie auch die Art und die Gleichung der Asymptote von G_p an. ☐

52.2 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_p .

Begründen Sie, dass die relativen Extrempunkte auch absolute Extrempunkte von G_p sind. ☒

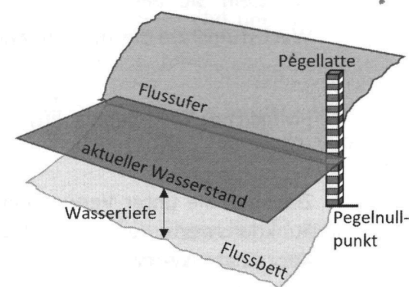
(mögliches Teilergebnis: $p'(x) = \frac{4(x^2 - 16x + 55)}{(x^2 - 16x + 73)^2}$)

52.3 Zeichnen Sie den Graphen G_p und seine Asymptoten im Bereich $0 \leq x \leq 16$ unter

Verwendung vorliegender Ergebnisse sowie weiterer Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf der x-Achse: $2 \text{ LE} \triangleq 1 \text{ cm}$, Maßstab auf der y-Achse: $1 \text{ LE} \triangleq 1 \text{ cm}$. ☐

52.4.0 Ein kleiner Fluss ist in der Vergangenheit bei

Starkregen schon öfter über die Ufer getreten. Der Pegelstand dieses Flusses ist als Höhe des Wasserstandes direkt an der Pegellatte mit festgelegtem Pegelnullpunkt zu verstehen. Zur Vermeidung von weiteren Überschwemmungen wurden Flutpolder erbaut, die die Wassermassen teilweise aufnehmen können. Bei Starkregenereignissen wird der Verlauf des



Pegelstandes des Flusses beobachtet. Ggf. werden die Schleusen der Polder geöffnet. Die Messdaten aus einem der letzten Starkregenereignisse lassen erkennen, dass der Pegelstand ab Einsetzen des Starkregens kontinuierlich angestiegen ist, bis die Polderschleusen geöffnet wurden. Nach dem Öffnen der Schleusen ist der Pegelstand gesunken. Die Funktion p beschreibt für $0 \leq x \leq 16$ modellhaft den zeitlichen Verlauf des Pegelstandes des Flusses, wobei x die verstrichene Zeit in Stunden ab dem Einsetzen des Starkregens ($x = 0$) und $p(x)$ den Pegelstand in Metern angibt.

52.4.1 Geben Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus 52.1 bis 52.3 an, nach wie vielen Stunden ab Einsetzen des Regens die Polderschleusen geöffnet wurden. Geben Sie auch an, in welchem Bereich die im Zeitraum $0 \leq x \leq 16$ beobachteten Pegelstände liegen. ☐

52.4.2 Bereits ab einem Pegelstand von 2,5 Metern wird eine Hochwasserwarnung herausgegeben. Berechnen Sie, nach welcher Zeit ab dem Einsetzen des Regens erstmalig eine Hochwasserwarnung herausgegeben wurde. ☐

52.5 Der Verlauf des Pegelstandes in den ersten 5 Stunden kann gut durch eine Gerade g , die durch die Punkte $A(0|p(0))$ und $B(5|p(5))$ verläuft, angenähert werden.

Zeichnen Sie die Gerade g für $0 \leq x \leq 16$ in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 52.3 ein und ermitteln Sie eine Gleichung von g .

Bei anhaltendem Starkregen und ohne Schleusenöffnung lässt sich der zeitliche Verlauf des Pegelstandes auch über die ersten 5 Stunden hinaus in guter Näherung durch die Gerade g beschreiben. Erreicht der Pegelstand die 3-Metermarke, kommt es zu Überschwemmungen. Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt ohne Schleusenöffnung mit einer Überschwemmung zu rechnen gewesen wäre. ○

Lösungen

1

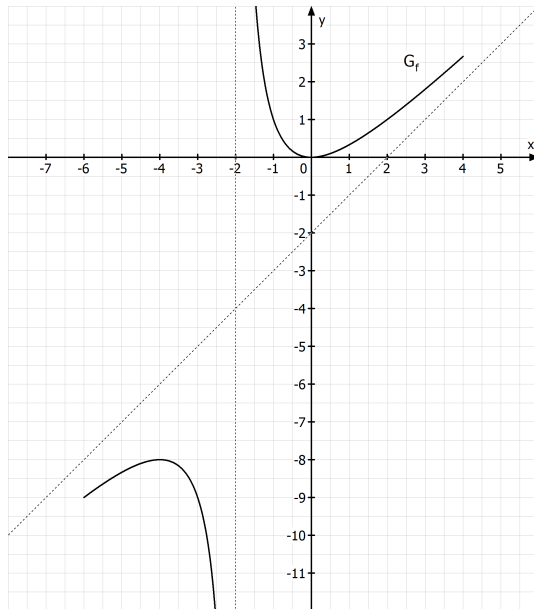
$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\text{Nullstelle: } g(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (doppelte Nullstelle)}$$

Gleichungen der Asymptoten:

1) $x = -2$ (senkrechte Asymptote wegen Polstelle 1. Ordnung bei $x = -2$)

$$2) x^2 : (x+2) = x - 2 + \frac{4}{x+2} \Rightarrow y = x - 2 \text{ (schiefe Asymptote)}$$



2.1

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 - 8}{(-x)^2 + 1} = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 1} = f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

2.2

Gleichung der Asymptote: $y = 2$ (wegen Zählergrad = Nennergrad)

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (x^2 + 1) - (2x^2 - 8) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4x^3 + 16x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{20x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 20x = 0 \Rightarrow x = 0$$

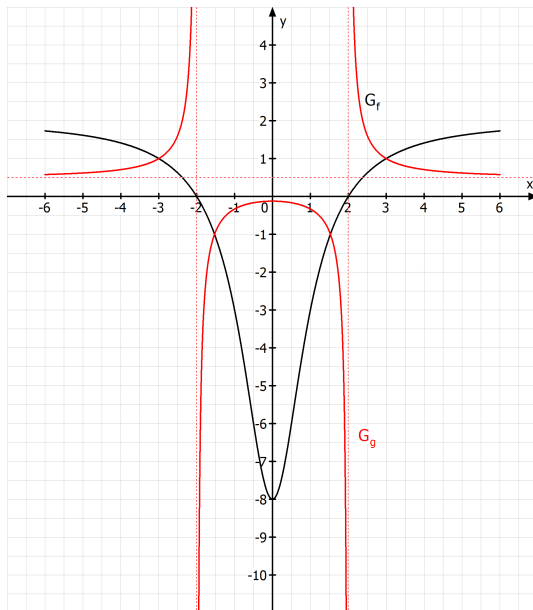
Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze von $20x$:

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ist Tiefpunkt} \Rightarrow TP(0/-8) \Rightarrow W(f) = [-8; 2[$$

2.3

$$f(3) = 1 \quad f(6) = 1 \frac{27}{37}$$



2.4.1

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Gleichungen der Asymptoten:

1) $x = -2$ und $x = 2$

(senkrechte Asymptoten wegen Polstellen 1. Ordnung bei $x = -2$ und $x = 2$)

2) $y = 0,5$ (wegen Zählergrad = Nennergrad)

keine Nullstellen

$$g'(x) = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{-\frac{20x}{(1+x^2)^2}}{\frac{(2x^2-8)^2}{(x^2+1)^2}} = -\frac{20x}{(2x^2-8)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -20x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Skizze von g' : Nenner immer positiv

Skizze von $-20x$:

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ist Hochpunkt} \Rightarrow \text{HP}(0/-\frac{1}{8})$$

2.4.2

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow (f(x))^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{2x^2-8}{x^2+1}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 1) \frac{2x^2-8}{x^2+1} = -1 \Rightarrow 2x^2-8 = -x^2-1 \Rightarrow 3x^2 = 7$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{7}{3}} \quad x_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$2) \frac{2x^2-8}{x^2+1} = 1 \Rightarrow 2x^2-8 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_3 = -3 \quad x_4 = 3$$

$$\Rightarrow \text{SP}_1(-\sqrt{\frac{7}{3}}/-1) \quad \text{SP}_2(\sqrt{\frac{7}{3}}/-1) \quad \text{SP}_3(-3/1) \quad \text{SP}_4(3/1)$$

2.4.3 Zeichnung siehe Koordinatensystem bei 2.3

3.1

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ (doppelt)} \quad (x_2 = -1) \notin D_f$$

Art der Definitionslücken:

$x = -1$ stetig behebbare Definitionslücke

$x = 2$ Polstelle 1. Ordnung

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)^2}{x-2} \text{ existiert nicht} \quad f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)^2}{x-2} \text{ existiert nicht} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)^2}{x-2} = -\frac{4}{3} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)^2}{x-2} = -\frac{4}{3}$$

3.2.1

Gleichungen der Asymptoten:

1) $x = 2$ (senkrechte Asymptote)

$$2) (x^2 - 2x + 1) : (x - 2) = x + \frac{1}{x-2} \Rightarrow y = x \text{ (schiefe Asymptote)}$$

3.2.2

$$\bar{f}'(x) = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2-2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$$\bar{f}'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

Skizze von $\bar{f}'$: Nenner immer positiv

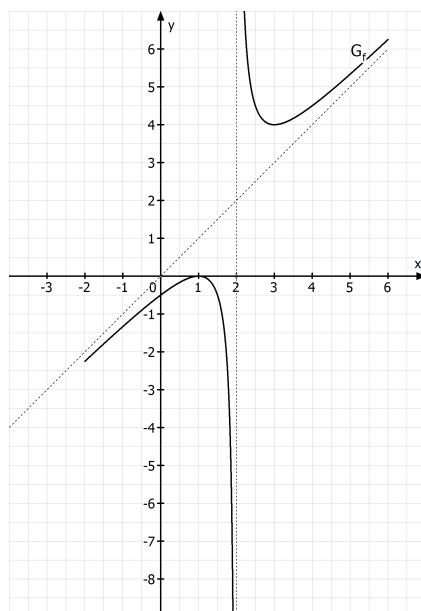
Skizze von $(x^2 - 4x + 3)$:

$\Rightarrow x = 1$ ist Hochpunkt $\Rightarrow \text{HP}(1/0)$

$x = 3$ ist Tiefpunkt $\Rightarrow \text{TP}(3/4)$

3.2.3

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{f}(x)$	-2,25	-1,33	-0,5	0	-	4	4,5	5,33	6,25



4.1

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Art der Definitionslücke: $x = 2$ ist Polstelle 2. Ordnung

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} - \frac{5}{(2x-4)^2} \right) \text{ existiert nicht} \quad g(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} - \frac{5}{(2x-4)^2} \right) \text{ existiert nicht} \quad g(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 2^+$$

$$g(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{7}{4} - \frac{5}{(2 \cdot 1 - 4)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ist Nullstelle von } g$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$$g(0) = \frac{7}{4} - \frac{5}{16} = \frac{23}{16} \Rightarrow S_y(0 / \frac{23}{16})$$

4.2

Gleichungen der Asymptoten:

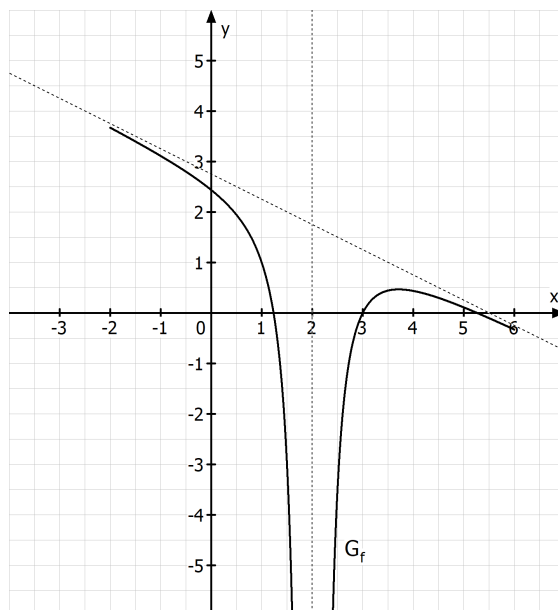
1) $x = 2$ (senkrechte Asymptote)

2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$ (schiefe Asymptote)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{(2x-4)^2} = 0_+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{(2x-4)^2} = 0_+$$

$\Rightarrow G_g$ nähert sich für $|x| \rightarrow \infty$ der Asymptote jeweils von unten.

4.3



5.1

$$\text{Nullstellen: } f(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x = 0 \Rightarrow -x(x-3)^2 = 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0 \text{ (einfach)} \quad x_2 = 3 \text{ (doppelt)}$$

Verhalten in der Umgebung der Definitionslücke:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{2(x-1)^2} \text{ existiert nicht} \quad f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{2(x-1)^2} \text{ existiert nicht} \quad f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 1^+$$

$\Rightarrow x = 1$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW)

5.2

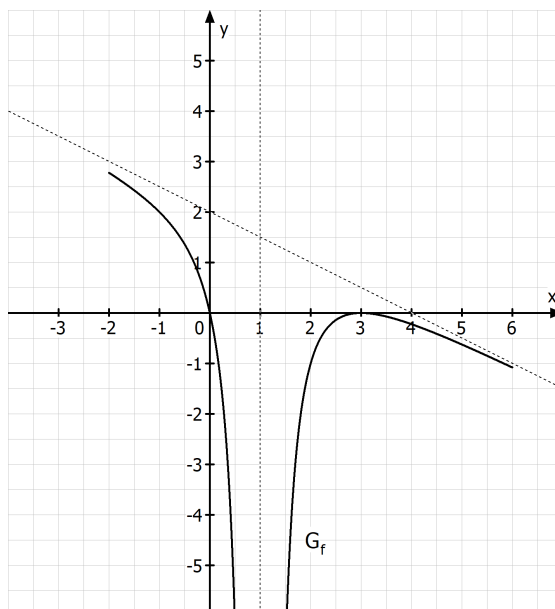
$$f(x) = \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{2x^2 - 4x + 2}$$

$$(-x^3 + 6x^2 - 9x) : (2x^2 - 4x + 2) = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{-4}{2x^2 - 4x + 2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 \text{ (schiefe Asymptote)}$$

Das Restglied ist für alle $x \in D_f$ negativ, d.h. der Graph der Funktion verläuft für alle $x \in D_f$ unterhalb der schiefen Asymptote.

5.3



6.1

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad (f)$$

$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

Gleichung der Asymptote:

$y = 0$ (wegen Zählergrad kleiner Nennergrad)

6.2

$$g(x) = 0 \Rightarrow 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$g'(x) = \frac{4(x^2 + 4x + 8) - (4x + 8)(2x + 4)}{(x^2 + 4x + 8)^2} = \frac{-4x^2 - 16x}{(x^2 + 4x + 8)^2}$$

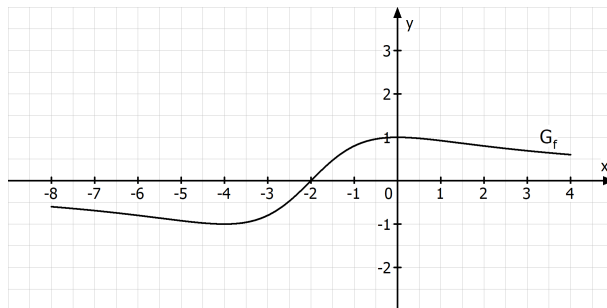
$$g'(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 - 16x = 0 \Rightarrow -4x(x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -4$$

Skizze von g' : Nenner immer positiv

Skizze von $(-4x^2 - 16x)$:

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ HP} \Rightarrow \text{HP}(0/1) \quad x_2 = -4 \text{ TP} \Rightarrow \text{TP}(-4/-1)$$

6.3



7.1

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Achsenschnittpunkte:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 6 - 6x = 0 \quad x = 1 \Rightarrow N(1/0)$$

$$f(0) = \frac{6}{1} = 6 \Rightarrow S_y(0/6)$$

Art der Definitionslücke:

$x = -1$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW)

Verhalten in der Umgebung der Definitionslücke:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6 - 6x}{(x + 1)^2} \text{ existiert nicht} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow -1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6 - 6x}{(x + 1)^2} \text{ existiert nicht} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow -1^+$$

7.2

Gleichungen der Asymptoten:

1) $x = -1$ (senkrechte Asymptote)

2) $y = 0$ (waagrechte Asymptote, weil Zählergrad kleiner Nennergrad)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6-6x}{(x+1)^2} = 0_- \Rightarrow$ der Graph nähert sich seiner Asymptote für $x \rightarrow +\infty$ von unten an

7.3

$$f'(x) = \frac{-6 \cdot (x+1)^2 - (6-6x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-6(x+1) - (12-12x)}{(x+1)^3} = \frac{6x-18}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$

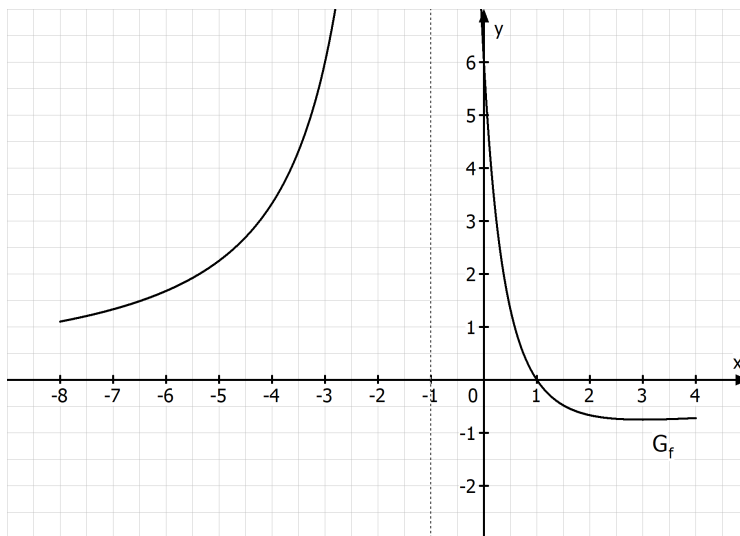
Skizze von f' :

Skizze Zähler:

Skizze Nenner:

$$\Rightarrow x = 3 \text{ ist Tiefpunkt} \Rightarrow \text{TP}(3/-\frac{3}{4})$$

7.4



8.1

Definitionsmenge: $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$

Art der Definitionslücke:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x-\frac{3}{2})}$$

$x = 1$ ist stetig behebbare Definitionslücke und $x = \frac{3}{2}$ ist Polstelle 1. Ordnung

Nullstelle: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad (x_2 = 1) \notin D_f$

$$8.2 \quad f(x) = \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x-\frac{3}{2})} = \frac{x}{2(x-\frac{3}{2})} = \frac{x}{2x-3} = \tilde{f}(x)$$

	0	1,5
x	-	+
2x - 3	-	-
$\frac{x}{2x-3}$	+	+

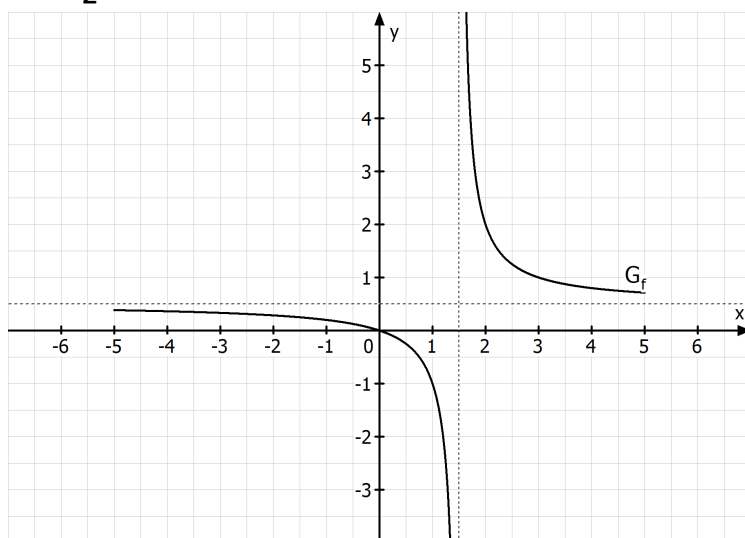
$\tilde{f}(x) > 0$ in $]-\infty; 0[$ sowie in $\left[\frac{3}{2}; \infty\right[$ und $\tilde{f}(x) < 0$ in $\left]0; \frac{3}{2}\right[$

8.3

Gleichungen der Asymptoten:

1) $x = 1,5$ (senkrechte Asymptote wegen Polstelle 1. Ordnung)

2) $y = \frac{1}{2}$ (Zählergrad = Nennergrad)



9.1

G_{g_2} müsste bei $x = -1$ wegen $x = -1$ Polstelle 2. Ordnung eine senkrechte Asymptote besitzen und müsste außerdem bei $x = 2$ und $x = -3$ Nullstellen besitzen.

G_{g_3} müsste bei $x = -1$ wegen $x = -1$ Polstelle 1. Ordnung eine senkrechte Asymptote besitzen.

G_{g_1} kann bei $y = 2$ keine waagrechte Asymptote besitzen, weil Zählergrad größer Nennergrad.

G_{g_5} müsste den Schnittpunkt mit der y-Achse bei $(0/-6)$ besitzen.

⇒ die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g_4 .

10.1

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3 = 0 \quad (f)$$

⇒ f hat keine Nullstellen

10.2

$$(x^2 + 3) : (-x + 1) = -x - 1 + \frac{4}{-x + 1}$$

Asymptoten:

$x = 1$ (senkrechte Asymptote)

$y = -x - 1$ (schiefe Asymptote)

10.3

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) - (x^2 + 3)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow -(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze von $(-x^2 + 2x + 3)$:

$$\Rightarrow G_f \text{ smf in }]-\infty; -1] \text{ sowie in } [3; \infty[$$

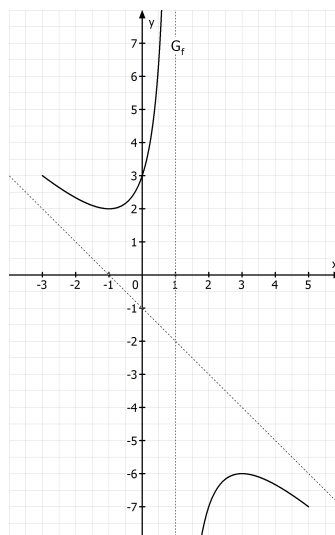
$$G_f \text{ sms in } [-1; 1[\text{ sowie in }]1; 3]$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ TP} \Rightarrow \text{TP}(-1/2) \quad x_2 = 3 \text{ HP} \Rightarrow \text{HP}(3/-6)$$

$$\text{Wertemenge: } W(f) =]-\infty; -6] \cup [2; +\infty[$$

10.4

x	-3	-1	0	0,5	1	1,5	3	5
g(x)	3	2	3	6,5	---	-10,5	-6	-7



11.1

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{4x^2 - 2x - 5}{2x - 4} \right) \text{ existiert nicht } g(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{4x^2 - 2x - 5}{2x - 4} \right) \text{ existiert nicht } g(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow 2^+$$

Gleichungen der Asymptoten:

$x=2$ (senkrechte Asymptote)

$$(4x^2 - 2x - 5)(2x - 4) = 2x + 3 + \frac{7}{2x - 4}$$

$y=2x+3$ (schiefe Asymptote)

11.2

$$2x + 3 + \frac{7}{2x - 4} > 2x + 3 \Rightarrow \frac{7}{2x - 4} > 0$$

$$\Rightarrow 2x - 4 > 0 \text{ (da Zähler immer positiv)} \Rightarrow x > 2 \Rightarrow B =]2; \infty[$$

12.1

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^< \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^2 \text{ existiert nicht } f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow -2^<$$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^> \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^2 \text{ existiert nicht } f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow -2^>$$

Nullstelle:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ (doppelte Nullstelle)}$$

$\Rightarrow G(f)$ berührt bei $x=2$ die x -Achse von oben

12.2 $W(f) = [0; +\infty[$, weil $f(x) \geq 0$ für alle $x \in D(f)$ und für $x \rightarrow -2^<$ strebt $f(x)$ gegen $+\infty$

12.3

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{1 \cdot (x+2) - (x-2) \cdot 1}{(x+2)^2} = 2 \cdot \frac{(x-2) \cdot 4}{(x+2)^3} = \frac{8x-16}{(x+2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x-16=0 \Rightarrow x=2$$

Skizze von f' :

Skizze Zähler:

Skizze Nenner:

$$\Rightarrow x=2 \text{ TP} \Rightarrow \text{TP}(2/0)$$

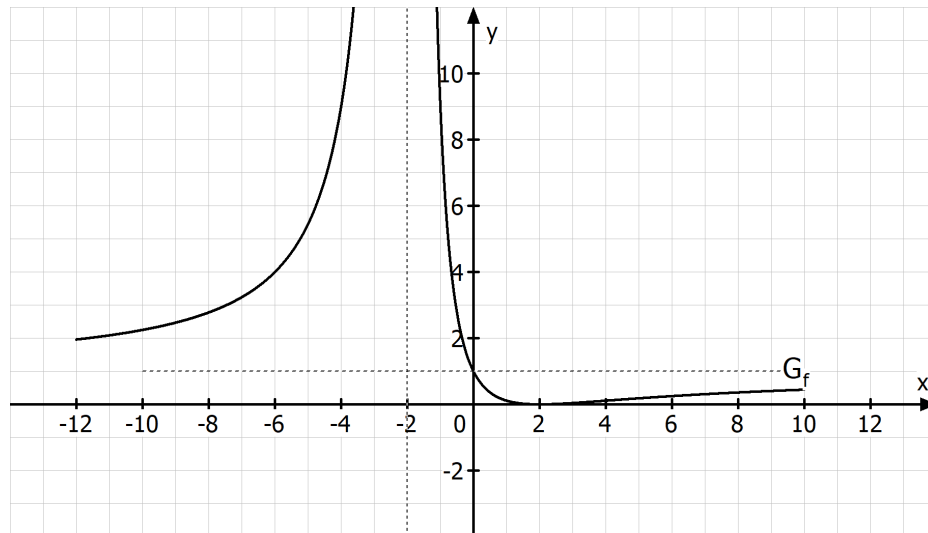
12.4

Asymptoten:

$x = -2$ (senkrechte Asymptote)

$y = 1$ (waagrechte Asymptote, weil Zählergrad = Nennergrad)

x	-12	-10	-8	-6	-4	-3,75	-2	-1	0	2	4	6	8	10
f(x)	1,96	2,25	2,78	4	9	10,8	---	9	1	0	0,11	0,25	0,36	0,44



12.5 Aus 12.3 ist bekannt, dass $G(f)$ bei $x = 2$ einen Tiefpunkt hat. In der Umgebung eines Tiefpunktes ist der Graph linksgekrümmt. Damit sich der Graph aber der waagrechten Asymptote $y = 1$ annähert, so muss für $x > 2$ die Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung übergehen, d.h. das Krümmungsverhalten muss sich für $x > 2$ ändern. Folglich muss $G(f)$ für $x > 2$ mindestens einen Wendepunkt besitzen.

12.6 F ist eine Stammfunktion von f , d.h. es gilt: $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ (doppelte Nullstelle)

Das Vorzeichen von F' ändert sich bei $x = 2$ nicht, also kann $x = 2$ kein Extrempunkt von F sein. Da F' eine doppelte Nullstelle bei $x = 2$ besitzt, hat F'' bei $x = 2$ noch eine einfache Nullstelle, d.h. F hat bei $x = 2$ einen Wendepunkt und wegen $F'(2) = 0$ ist dies sogar ein Terrassenpunkt.

13.1

Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Gleichungen der Asymptoten:

$x=1$ (Polstelle 1. Ordnung)

$$(x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = x - 3 + \frac{1}{x - 1}$$

$\Rightarrow y = x - 3$ (schiefe Asymptote)

Nullstelle:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

13.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-2) \cdot (x-1) - (x-2)^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2(x^2 - 3x + 3) - (x^2 - 4x + 4)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

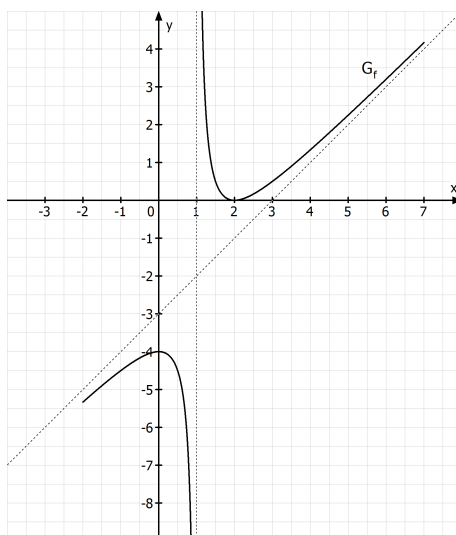
Skizze von $(x^2 - 2x)$:

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ HP} \Rightarrow \text{HP}(0 / -4)$$

$$x_2 = 2 \text{ TP} \Rightarrow \text{TP}(2 / 0)$$

13.3

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	-5,33	-4,5	-4	---	0	0,5	1,33	2,25	3,2	4,17



14

(1) nicht entscheidbar

(2) Aussage richtig, da G_h links von $x = 0$ steigt und rechts von $x = 0$ fällt

(3) Aussage falsch, weil $h'(1) = 0$ gelten müsste

15.1

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -4 \Rightarrow S_y(0/-4)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \quad N_1(-2/0)$$

$$x_2 = 2 \quad N_2(2/0)$$

Gleichungen der Asymptoten:

$x = 1$ senkrechte Asymptote

$y = 1$ waagrechte Asymptote (wegen Zählergrad gleich Nennergrad)

15.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)^2 \cdot 2x - (x^2-4) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 8}{(x-1)^3} = \frac{-2x+8}{(x-1)^3} \quad D_{f'} = D_f \end{aligned}$$

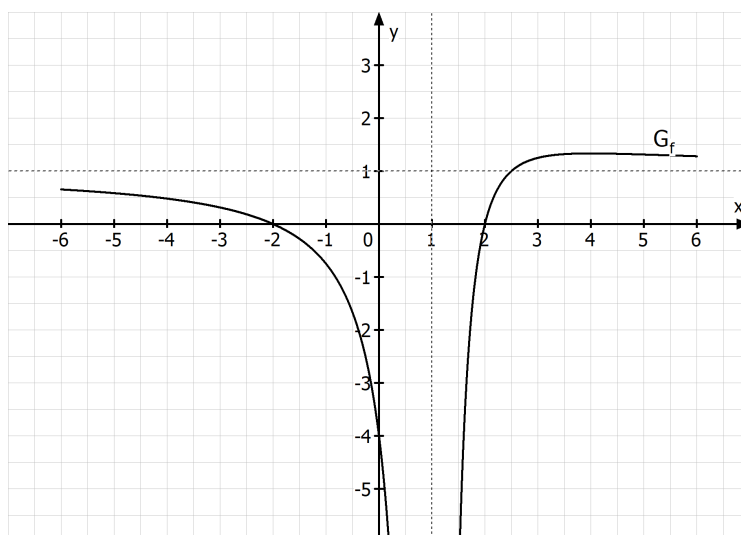
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Vorzeichenuntersuchung von f' :

G_f smf in $]-\infty; 1[$ sowie in $[4; +\infty[$

G_f sms in $]1; 4]$

15.3



16.1

Definitionsmenge:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow 2(x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$$

Nullstelle:

$$\frac{(x-3)(x+2)}{2x^2 - 8x + 6} = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow (x_1 = 3) \notin D_f \quad x_2 = -2$$

Art der Definitionslücken:

$x = 3$: stetig behebbare Definitionslücke

$x = 1$: Polstelle 1. Ordnung

16.2

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{2(x-3)(x-1)} = \frac{x+2}{2(x-1)} = \frac{x+2}{2x-2} = \tilde{f}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x-2} \text{ existiert nicht} \quad \tilde{f}(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x-2} \text{ existiert nicht} \quad \tilde{f}(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 1^+$$

Gleichungen und Art der Asymptoten:

$x = 1$ senkrechte Asymptote

$y = \frac{1}{2}$ waagrechte Asymptote (Zählergrad = Nennergrad)

16.3

$$\tilde{f}'(x) = \frac{1 \cdot (2x-2) - (x+2) \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{2x-2-2x-4}{(2x-2)^2} = \frac{-6}{(2x-2)^2} = \frac{-6}{4(x-1)^2} = \frac{-3}{2(x-1)^2}$$

Zähler immer negativ und Nenner immer positiv $\Rightarrow \tilde{f}'(x) < 0$ für alle $x \in D_{\tilde{f}}$

$\Rightarrow G_{\tilde{f}}$ smf in $]-\infty; 1[$ sowie in $]1; \infty[$

Wertemenge: $W = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$

16.4

$$y = mx + t$$

$$m = \tilde{f}'(2) = -\frac{3}{2} \quad y_p = \tilde{f}(2) = 2 \Rightarrow P(2/2)$$

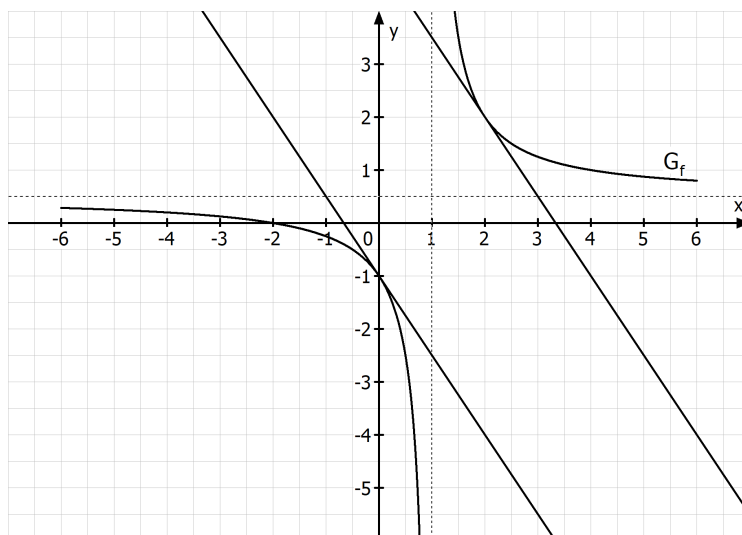
$$\Rightarrow 2 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + t \Rightarrow t = 5$$

$$\Rightarrow t: y = -\frac{3}{2}x + 5$$

$$\frac{-3}{2(x-1)^2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow -3 = -1,5 \cdot 2(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$\Rightarrow R(0/-1)$$

16.5



16.6

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \frac{x+2}{2x-2} \Rightarrow (x+2):(2x-2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x-2} \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{1}{2}x + 3 \cdot \ln|2x-2| \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \cdot \ln|2x-2| + C \\ \Rightarrow A &= - \int_{-2}^0 \tilde{f}(x) dx = - \left[\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \cdot \ln|2x-2| \right]_{-2}^0 = - \left[0 - \left(-1 + \frac{3}{2} \ln 3 \right) \right] = \frac{3}{2} \ln 3 - 1 \approx 0,65\end{aligned}$$

17.1

Definitionsmenge: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstelle:

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (doppelte Nullstelle)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2} \right) = 2 \quad (\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2} \right) = 2 \quad (\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0}^< \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2} \right) \text{ existiert nicht} \quad g(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 0^<$$

$$\lim_{x \rightarrow 0}^> \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2} \right) \text{ existiert nicht} \quad g(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 0^>$$

Asymptoten:

$$x=0 \quad y=2$$

17.2

Extrempunkt muss bei $x = 0,5$ liegen, weil doppelte Nullstelle

$\Rightarrow$ einfache Nullstelle von g' (VZW)

$x = 0,5$ muss wegen des Grenzwertens aus 17.1 ein Tiefpunkt sein TIP(0,5/0)

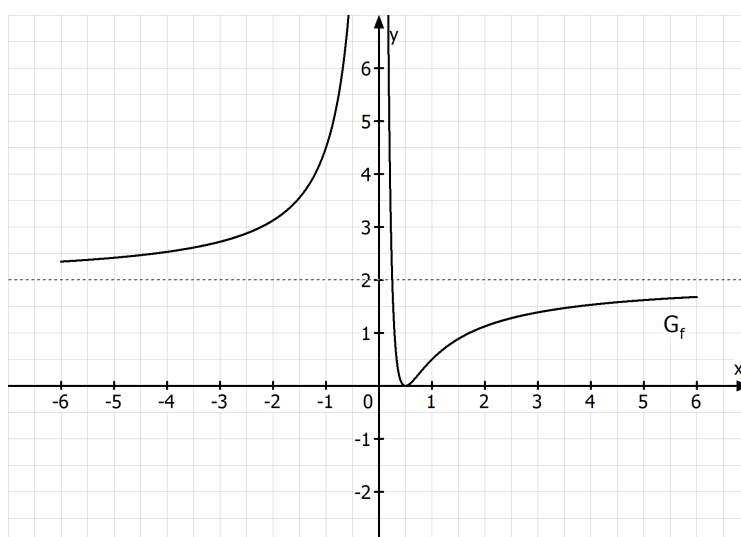
17.3

$$(4x^2 - 4x + 1) : (2x^2) = 2 + \frac{-4x + 1}{2x^2}$$

Schnittpunkt mit waagrechter Asymptote:

$$\frac{-4x + 1}{2x^2} = 0 \Rightarrow -4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0,25 \Rightarrow SP(0,25/2)$$

17.4



18.1

Definitionsmenge: $4(x-3)=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Nullstellen: $f(x)=0 \Rightarrow x^2-5=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{5} \quad x_2=\sqrt{5}$

Art der Definitionslücke: $x=3$ ist Polstelle 1. Ordnung,
weil 3 keine Nullstelle des Zählers ist;

18.2

$$(x^2 - 5) : (4x - 12) = 0,25x + 0,75 + \frac{4}{4x - 12}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0,25x + 0,75 + \frac{4}{4x - 12}$$

Gleichungen der Asymptoten:

1) $x=3$ senkrechte Asymptote

2) $y=0,25x+0,75$ schiefe Asymptote

18.3

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (4x-12) - (x^2-5) \cdot 4}{(4x-12)^2} = \frac{8x^2 - 24x - 4x^2 + 20}{(4x-12)^2} = \frac{4x^2 - 24x + 20}{(4x-12)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 20 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = 1$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

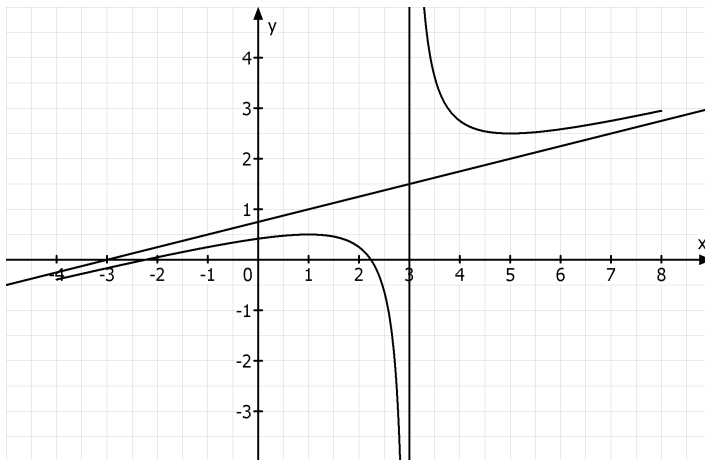
$\Rightarrow G_f$ ist sms in $]-\infty; 1]$ sowie in $[5; \infty[$

G_f ist smf in $[1; 3[$ sowie in $]3; 5]$

$\Rightarrow x_1 = 5$ TIP $\Rightarrow$ TIP(5/2,5) $x_2 = 1$ HOP $\Rightarrow$ HOP(1/0,5)

$\Rightarrow W =]-\infty; 0,5] \cup [2,5; \infty[$

18.4



19.1

$$f(x) = a \cdot \frac{(x+1)(x-4)}{(x-1)^2(x-4)}$$

$$f(5) = a \cdot \frac{6 \cdot 1}{4^2 \cdot 1} = 3 \Rightarrow a \cdot \frac{3}{8} = 3 \Rightarrow a = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = 8 \cdot \frac{(x+1)(x-4)}{(x-1)^2(x-4)}$$

19.2

$$g(x) = \frac{8x+8}{(x-1)^2} \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Gleichungen der Asymptoten:

1) $y=0$ (Nennergrad größer Zählergrad) waagrechte Asymptote

2) $x=1$ (Polstelle 2. Ordnung) senkrechte Asymptote

Nullstelle: $g(x)=0 \Rightarrow 8x+8=0 \Rightarrow x=-1$

19.3

$$g'(x) = \frac{8(x-1)^2 - (8x+8) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{8(x-1) - (8x+8) \cdot 2}{(x-1)^3} = \frac{-8x-24}{(x-1)^3}$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow -8x-24=0 \Rightarrow x=-3$$

Skizze von g' :

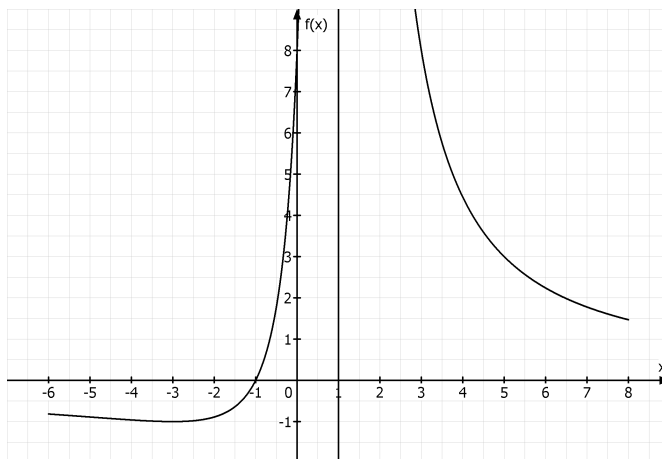
Skizze Zähler:

Skizze Nenner:

$$\Rightarrow G_g \text{ smf in }]-\infty; -3] \text{ sowie in }]1; \infty[\quad G_g \text{ sms in } [-3; 1[$$

$$\Rightarrow x=-3 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(-3/-1)$$

19.4



20.1

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{2(x+2)^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$x = -2$ in Zähler: $(-2)^3 + 3(-2)^2 = 4 \neq 0 \Rightarrow x = -2$ Polstelle 2. Ordnung

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^< \left(\frac{x^3 + 3x^2}{2(x+2)^2} \right) \text{ existiert nicht} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow -2^<$$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^> \left(\frac{x^3 + 3x^2}{2(x+2)^2} \right) \text{ existiert nicht} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow -2^>$$

20.2

$$(x^3 + 3x^2) : (2x^2 + 8x + 8) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{4}{2x^2 + 8x + 8}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{4}{2x^2 + 8x + 8} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{4}{2(x+2)^2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

Gleichungen der Asymptoten:

1) $x = -2$ (wegen Polstelle 2. Ordnung)

$$2) y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

G_f verläuft immer oberhalb der schiefen Asymptote, weil es keinen

Schnittpunkt von G_f mit der schiefen Asymptote gibt, weil $\frac{2}{(x+2)^2} \neq 0$

und $\frac{2}{(x+2)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ größer Null ist.

20.3

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x) \cdot (2x^2 + 8x + 8) - (x^3 + 3x^2) \cdot (4x + 8)}{\left[2(x+2)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{(3x^2 + 6x) \cdot 2 \cdot (x+2) - 4 \cdot (x^3 + 3x^2)}{4(x+2)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 + 12x^2 + 12x^2 + 24x - 4x^3 - 12x^2}{4(x+2)^3} = \frac{2x^3 + 12x^2 + 24x}{4(x+2)^3} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{2(x+2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 6x + 12) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \text{keine weiteren Nullstellen}$$

Skizze von f' :

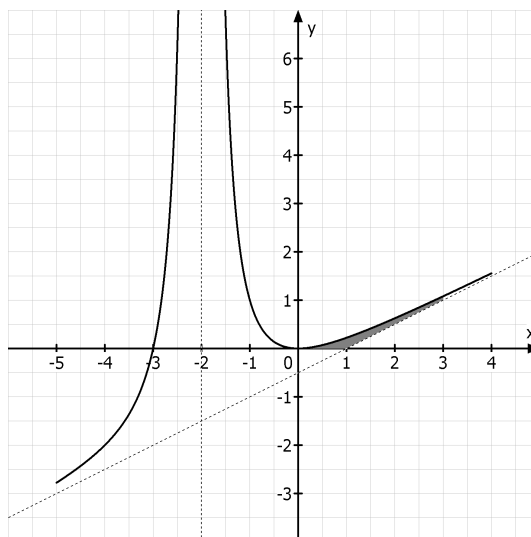
Skizze Zähler:

Skizze Nenner:

$$\Rightarrow G_f \text{ sms in }]-\infty; -2[\quad G_f \text{ smf in }]-2; 0[\quad G_f \text{ sms in } [0; \infty[$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ TIP} \Rightarrow \text{TIP}(0/0)$$

20.4



20.5

$$\begin{aligned}
 A(u) &= \int_0^u \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right) dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\
 \int_0^u \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right) dx &= \int_0^u \left(\frac{2}{(x+2)^2} \right) dx = \int_0^u \left(2(x+2)^{-2} \right) dx = \left[2 \cdot (-1) \cdot (x+2)^{-1} \right]_0^u = \\
 &= \left[\frac{-2}{x+2} \right]_0^u = \frac{-2}{u+2} - (-1) = 1 - \frac{2}{u+2} \\
 \Rightarrow A(u) &= 1 - \frac{2}{u+2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{u+2} \\
 \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{u+2} \right) &= \frac{3}{4} \Rightarrow \text{endliche Fläche}
 \end{aligned}$$

21.1

$$h(x) = \frac{(x-1)(3x-0,5x^2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{Definitionsmenge: } (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$\Rightarrow D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$x=1$: stetig behebbare Definitionslücke

$x=-1$: Polstelle 1. Ordnung

$$h(x) = 0 \Rightarrow 3x - 0,5x^2 = 0 \Rightarrow x(3 - 0,5x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$

21.2.1

$$(-0,5x^2 + 3x) : (x+1) = -0,5x + 3,5 + \frac{-3,5}{x+1}$$

$$\Rightarrow y = -0,5x + 3,5 \text{ schiefe Asymptote}$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ senkrechte Asymptote}$$

21.2.2

$$f'(x) = \frac{(-x+3)(x+1) - (-0,5x^2 + 3x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3 + 0,5x^2 - 3x}{(x+1)^2} = \frac{-0,5x^2 - x + 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -0,5x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot 3}}{2 \cdot (-0,5)} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{-1}$$

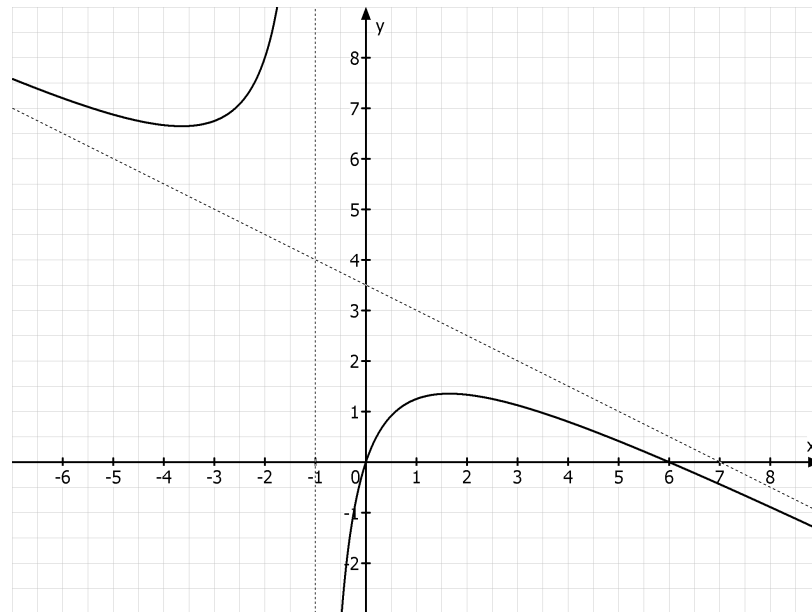
$$\Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{7} \approx -3,65 \quad x_2 = -1 + \sqrt{7} \approx 1,65$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze von $(-0,5x^2 - x + 3)$:

$$\Rightarrow x \approx -3,65 \quad \text{TIP} \quad \text{TIP}(-3,65/6,65) \quad x \approx 1,65 \quad \text{HOP} \quad \text{HOP}(1,65/1,35)$$

21.2.3



22.1

$$\text{Definitionsmenge: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 1$$

$$\Rightarrow D_h = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$$

$$h(x) = \frac{(x^2 + 1)(1 - x)}{(x - 2)(x - 1)}$$

$x = 2$ Polstelle 1. Ordnung, weil sich $(x - 2)$ nicht aus dem Nenner kürzen lässt

$x = 1$ ist stetig behebbare Definitionslücke, weil sich $(x - 1)$ vollständig aus dem Nenner kürzen lässt

$$\text{Nullstellen: } h(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(1 - x) = 0 \Rightarrow (x = 1) \notin D_h$$

$\Rightarrow h$ hat keine Nullstellen

Stetige Fortsetzung von h :

$$\tilde{h}(x) = \frac{-(x^2 + 1)}{x - 2} = \frac{-x^2 - 1}{x - 2} \quad D_{\tilde{h}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

22.2.1

$$(x^2 + 1) : (-x + 2) = -x - 2 + \frac{5}{-x + 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -x - 2 + \frac{5}{-x + 2}$$

Gleichungen der Asymptoten:

1) $y = -x - 2$ schiefe Asymptote

2) $x = 2$ senkrechte Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{2 - x} \text{ existiert nicht} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{2 - x} \text{ existiert nicht} \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 2^+$$

22.2.2

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2 - x) - (x^2 + 1) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2 + 1}{(2 - x)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

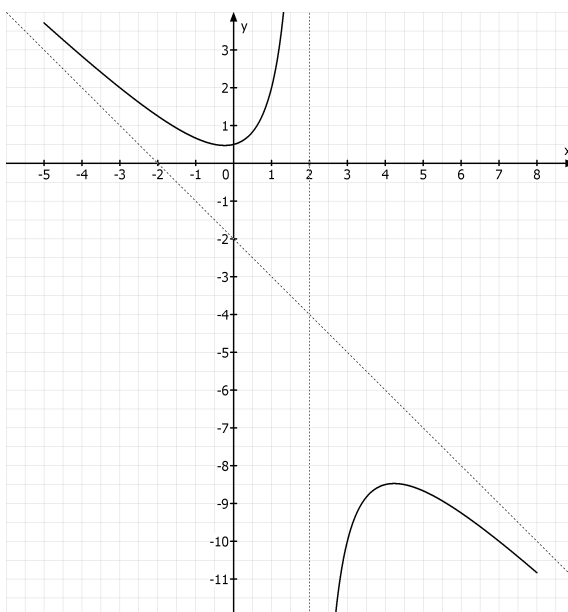
$$\Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{5} (\approx -0,24) \quad x_2 = 2 + \sqrt{5} (\approx 4,24)$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze von $(x^2 + 4x + 1)$:

$$\Rightarrow x = -0,24 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(-0,24 / 0,47) \quad x = 4,24 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(4,24 / -8,47)$$

22.2.3



23.1

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \quad (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = -1$$

Art der Definitionslücke:

$$x = -2 \text{ in Zähler einsetzen: } (-2)^2 - 4(-2) - 5 = 7 \neq 0$$

$\Rightarrow x = -2$ ist Polstelle 1. Ordnung

$$\lim_{x \rightarrow -2}^< \frac{x^2 - 4x - 5}{2x + 4} \text{ existiert nicht } f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow -2^<$$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^> \frac{x^2 - 4x - 5}{2x + 4} \text{ existiert nicht } f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow -2^>$$

23.2

$$(x^2 - 4x - 5) : (2x + 4) = 0,5x - 3 + \frac{7}{2x + 4}$$

$\Rightarrow y = 0,5x - 3$ schiefe Asymptote

$x = -2$ senkrechte Asymptote wegen Polstelle 1. Ordnung

23.3

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(2x+4) - (x^2-4x-5) \cdot 2}{(2x+4)^2} = \frac{4x^2-16-2x^2+8x+10}{(2x+4)^2} = \frac{2x^2+8x-6}{(2x+4)^2}$$

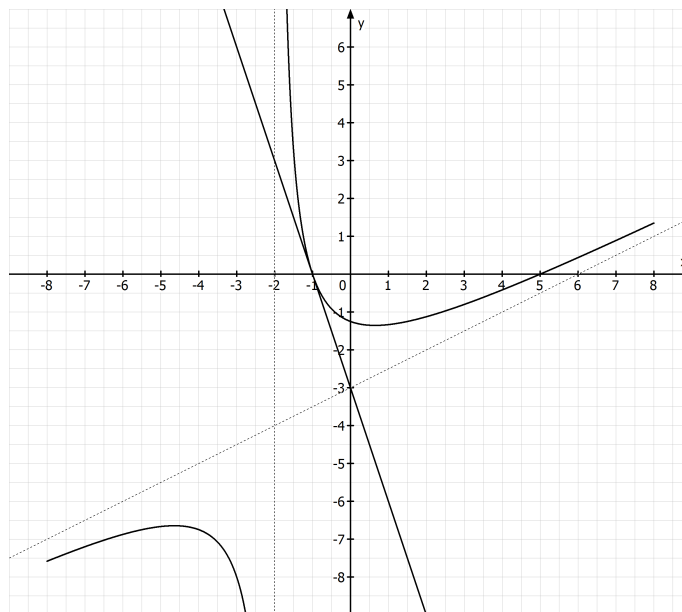
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 + \sqrt{7} \approx 0,65 \quad x_2 = -2 - \sqrt{7} \approx -4,65$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze Zähler:

$$\Rightarrow x = -4,65 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(-4,65 / -6,65)$$

$$\Rightarrow x = 0,65 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(0,65 / -1,35)$$



23.4

23.5

$$y = mx + t$$

$$m = f'(-1) = \frac{-6}{2} = -3$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 0 = -3 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = -3$$

$$\Rightarrow y = -3x - 3$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

g = Nullstelle von schiefe Asymptote – Nullstelle Tangente

$$g = 6 - (-1) = 7$$

$$h = |y - \text{Achsenabschnitt}| = 3$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = 10,5 \text{ FE}$$

24.1

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(4 + \frac{8x-12}{(x-2)^2} \right) = 4 \Rightarrow f(x) \rightarrow 4 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(4 + \frac{8x-12}{(x-2)^2} \right) \text{ existiert nicht} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(4 + \frac{8x-12}{(x-2)^2} \right) \text{ existiert nicht} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 2^+$$

Asymptoten:

$$y = 4 \quad x = 2$$

24.2

$$4 + \frac{8x-12}{(x-2)^2} = 4 \Rightarrow \frac{8x-12}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 8x-12=0 \Rightarrow x=1,5$$

$$\Rightarrow \text{SP}(1,5/4)$$

24.3

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4(x-2)^2 + 8x - 12}{(x-2)^2} = \frac{4(x^2 - 4x + 4) + 8x - 12}{(x-2)^2} = \frac{4x^2 - 8x + 4}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{4(x^2 - 2x + 1)}{(x-2)^2} = \frac{4(x-1)^2}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{SP mit } y\text{-Achse: } y = \frac{4(0-1)^2}{(0-2)^2} = 1 \Rightarrow S_y(0/1)$$

$$\text{SP mit } x\text{-Achse: } \frac{4(x-1)^2}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 4(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow N(1/0)$$

24.4

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4 \cdot 2(x-1) \cdot (x-2)^2 - 4(x-1)^2 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{8(x-1)(x-2) - 8(x-1)^2}{(x-2)^3} = \frac{8(x^2 - 3x + 2) - 8(x^2 - 2x + 1)}{(x-2)^3} = \frac{-8x + 8}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 8 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Skizze von f' :

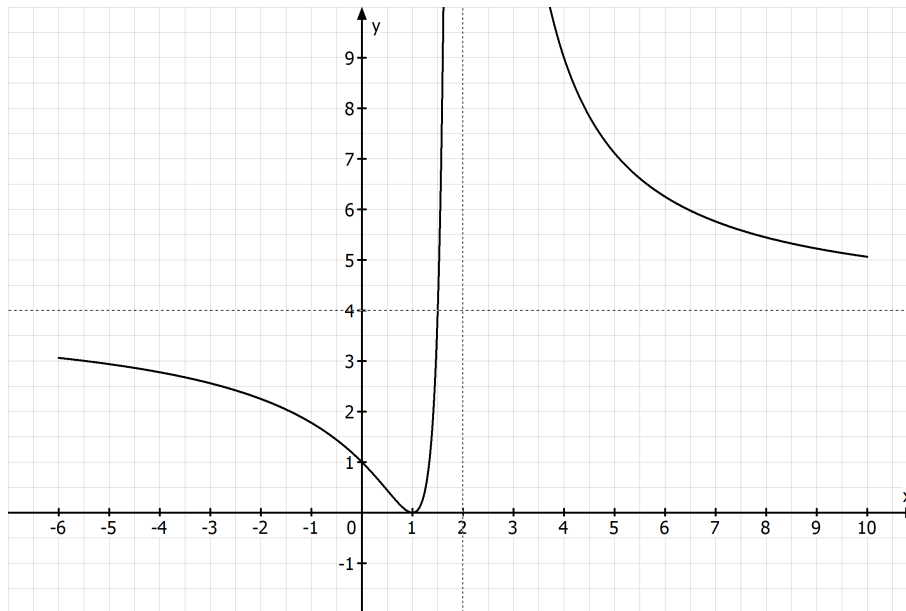
Skizze Zähler:

Skizze Nenner:

$$\Rightarrow G_f \text{ smf in }]-\infty; 1] \quad G_f \text{ sms in } [1; 2[\quad G_f \text{ smf in }]2; \infty[$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(1/0)$$

24.5



25.1

Definitionsmenge:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Nullstelle:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 = 0 \Rightarrow (x = -1) \notin D_g$$

$\Rightarrow g$ hat keine Nullstellen

Art der Definitionslücken:

$x = 1$ Polstelle 1. Ordnung

$x = -1$ stetig behebbare Definitionslücke

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+1)^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+1)}{x-1} \text{ existiert nicht}$$

$$g(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 1$$

$$g(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow 1 \text{ wegen Polstelle 1. Ordnung}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{x-1} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{x-1} = 0$$

25.2.1

Asymptoten:

1) $x=1$ senkrechte Asymptote

$$2) (2x+2):(x-1) = 2 + \frac{4}{x-1}$$

$\Rightarrow y=2$ waagrechte Asymptote

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-1} = 0_+ \Rightarrow G_f$ nähert sich für $x \rightarrow +\infty$ von oben an die Asymptote $y=2$ an;

25.2.2

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2(x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-2}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

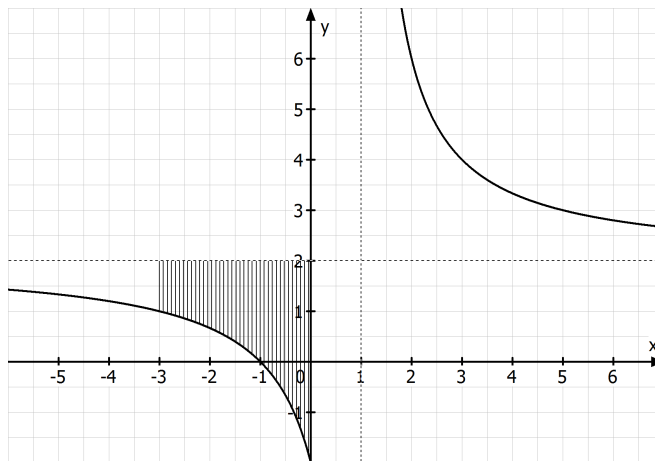
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4 = 0 \text{ (f)}$$

Zähler immer negativ; Nenner immer positiv;

$\Rightarrow G_f$ sms in $]-\infty; -1[$ sowie in $]1; \infty[$

Wertemenge: $W = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

25.2.3



25.2.4

$$\begin{aligned} A(a) &= \int_a^0 (2 - f(x)) dx = \int_a^0 \left(-\frac{4}{x-1}\right) dx = \left[-4 \cdot \ln|x-1|\right]_a^0 = \\ &= (-4 \ln|-1|) - (-4 \ln|a-1|) = 4 \ln|a-1| \end{aligned}$$

25.2.5

$\lim_{a \rightarrow -\infty} (4 \cdot \ln|a-1|)$ existiert nicht

$A(a) \rightarrow +\infty$ für $a \rightarrow -\infty$ (keine endliche Fläche)

25.2.6

$$F'(x) = f(x)$$

G_f sms in $]-\infty; -1[$ G_f smf in $]1; \infty[$ siehe Zeichnung von f

26.1

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x=0 \text{ Polstelle 3. Ordnung}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-0,5$$

26.2

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x^3} \right) = 0 \quad (\text{Zählergrad} < \text{Nennergrad})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+1}{x^3} \right) \text{ existiert nicht}$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{für } x \rightarrow 0^-$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{für } x \rightarrow 0^+ \quad \text{wegen Polstelle 3. Ordnung}$$

26.3

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (2x+1)}{x^6} = \frac{2x - 3(2x+1)}{x^4} = \frac{-4x-3}{x^4}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -4x-3=0 \Rightarrow x=-0,75$$

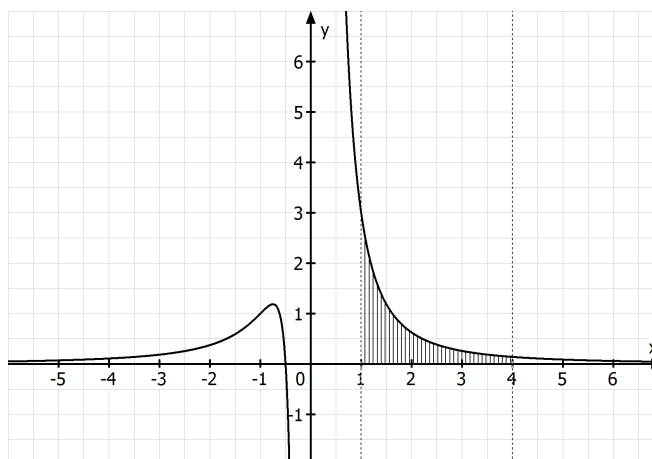
Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze von $(-4x-3)$:

$$\Rightarrow G_f \text{ smf in }]-\infty; -0,75] \quad G_f \text{ smf in } [-0,75; 0[\text{ sowie in }]0; \infty[$$

$$\Rightarrow x = -0,75 \text{ HOP} \Rightarrow \text{HOP}(-0,75 / \frac{32}{27})$$

26.4



26.5

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3} = \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 2x^{-2} + x^{-3}$$

$$F(x) = -2x^{-1} - 0,5x^{-2} + C = -\frac{2}{x} - \frac{0,5}{x^2} + C$$

26.6

$$A(b) = \int_1^b f(x) dx = \left[-\frac{2}{x} - \frac{0,5}{x^2} \right]_1^b = -\frac{2}{b} - \frac{0,5}{b^2} - (-2 - 0,5) = -\frac{2}{b} - \frac{0,5}{b^2} + 2,5$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{b} - \frac{0,5}{b^2} + 2,5 \right) = 2,5$$

27.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - (0,25x + 0,75)) = 0 \quad \text{da sich } G_h \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ der schiefen Asymptote annähert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (h'(x)) = 0,25 \quad \text{da sich } G_h \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ der schiefen Asymptote annähert}$$

$$27.2 \quad IL =]2; 4[$$

27.3

$$r(x) = \frac{a}{x+b}$$

$$\Rightarrow b = -1 \quad \text{wegen Polstelle bei } x = 1$$

$$\Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow 0,75 + \frac{a}{0-1} = 0 \Rightarrow a = 0,75$$

$$\Rightarrow h(x) = 0,25x + 0,75 + \frac{0,75}{x-1}$$

28.1

$$x=2 \text{ in Zähler: } 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0 \Rightarrow x=2 \text{ stetig behebbare Definitionslücke}$$

$$x=3 \text{ in Zähler: } 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 4 \Rightarrow x=3 \text{ Polstelle 1. Ordnung}$$

28.2

$$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x-2) = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \quad x_3 = -1$$

$$\Rightarrow f \text{ hat eine Nullstelle bei } x = -1$$

28.3.1

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2(x-3)} = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}$$

$$(x^2 - x - 2) : (2x - 6) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{4}{2x - 6}$$

$\Rightarrow g$ ist die stetige Fortsetzung von f ;

28.3.2

Nullstellen: $x_1 = -1$ $x_2 = 2$

Asymptoten: $x = 3$ senkrechte Asymptote

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ schiefe Asymptote}$$

28.3.3

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{0 \cdot (x-3) - 2 \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-3)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 = (x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = 1$$

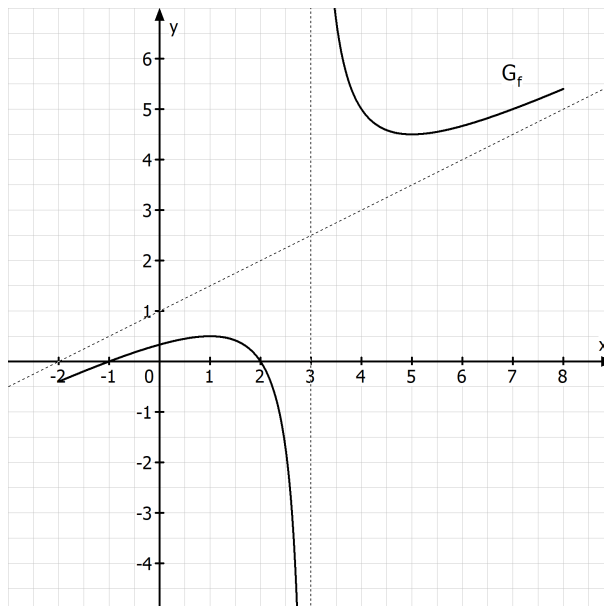
Skizze von g' : Nenner immer positiv

Skizze von Zähler:

$$\Rightarrow G_g \text{ smf in }]-\infty; 1] \text{ sowie in } [5; \infty[\quad G_g \text{ smf in } [1; 3[\text{ sowie in }]3; 5]$$

$$\Rightarrow x_1 = 5 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(5/4, 5) \quad x_2 = 1 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(1/0, 5)$$

28.3.4



28.3.5

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2} < \frac{1}{2} \quad \text{da } \frac{2}{(x-3)^2} > 0 \text{ in } D_{g'}$$

$$\Rightarrow W = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$$

29.1 $f(x) = 0 \Rightarrow 0,5x^2 - 3x + 0,5 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 - \sqrt{8} \approx 0,17 \quad x_2 = 3 + \sqrt{8} \approx 5,83$

29.2

Waagrechte Asymptote: $y = 0,5$

$$(0,5x^2 - 3x + 0,5) : (x^2 + 1) = 0,5 + \frac{-3x}{x^2 + 1}$$

gemeinsame Punkte: $\frac{-3x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S(0|0,5)$

29.3

$$f'(x) = \frac{(x-3) \cdot (x^2+1) - (0,5x^2 - 3x + 0,5) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3 - x^3 + 6x^2 - x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2 - 3}{(x^2+1)^2}$$

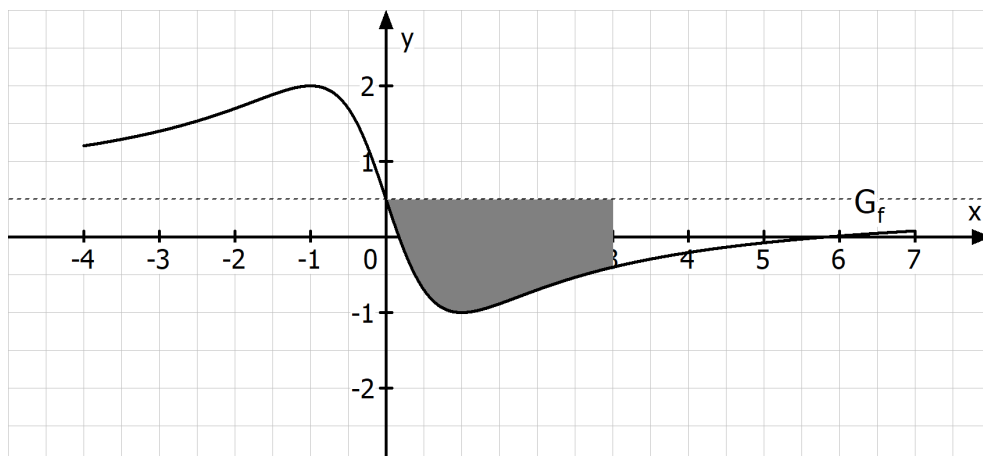
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze von $(3x^2 - 3)$:

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(-1|2) \quad x_2 = 1 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(1|-1)$$

29.4



$$29.5 \quad F'(x) = 0,5 - 1,5 \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{0,5 \cdot (x^2+1) - 3x}{x^2+1} = \frac{0,5x^2 - 3x + 0,5}{x^2+1} = f(x)$$

29.6

$$A = \int_0^3 \left(0,5 - \frac{0,5x^2 - 3x + 0,5}{x^2+1} \right) dx = \left[0,5x - 0,5x + 1,5 \cdot \ln(x^2+1) \right]_0^3 = 1,5 \cdot \ln(10) - 1,5 \cdot \ln(1) = 1,5 \cdot \ln(10)$$

29.7

$$\int_{-3}^3 (0,5 - f(x)) dx = 0$$

$$\int_0^3 (0,5 - f(x)) dx = 1,5 \cdot \ln(10) \Rightarrow \int_{-3}^0 (0,5 - f(x)) dx = -1,5 \cdot \ln(10)$$

Die beiden Flächenstücke haben die gleichen Flächenmaßzahlen.

30.1

$$\text{Definitionsmenge: } x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

$$\Rightarrow D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$$

$$\text{Nullstellen: } h(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 + 3x + 3 = 0 \text{ negative Diskriminante}$$

h hat eine Nullstelle bei x=0

x=0: stetig behebbare Definitionslücke

x=-2: Polstelle 1. Ordnung

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} \right) = \frac{3}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x^2 + 2x} \right) \text{ existiert nicht} \quad h(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow -2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x^2 + 2x} \right) \text{ existiert nicht} \quad h(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow -2^+$$

30.2.1

$$(x^2 + 3x + 3) : (x + 2) = x + 1 + \frac{1}{x + 2}$$

Asymptoten:

1) y = x + 1 schiefe Asymptote

2) x = -2 senkrechte Asymptote

30.2.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+2} \right) = 0_+$$

G_f nähert sich für $x \rightarrow +\infty$ von oben an die schiefe Asymptote an.

30.2.3

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+2) - (x^2+3x+3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+7x+6-x^2+3x+3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow x_1=-3 \quad x_2=-1$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

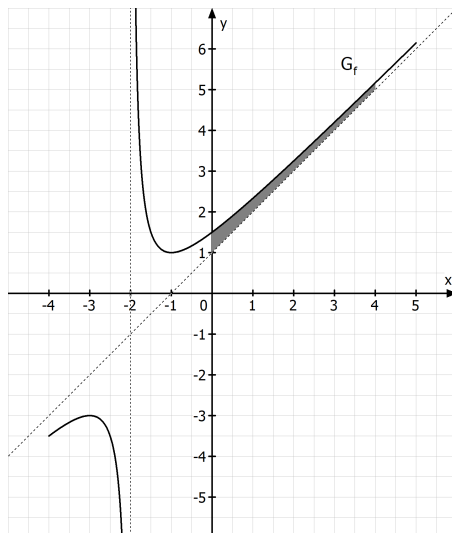
Skizz von (x^2+4x+3) :

$$\Rightarrow G_f \text{ sms in }]-\infty; -3] \text{ sowie in } [-1; \infty[$$

$$G_f \text{ smf in } [-3; -2[\text{ sowie in }]-2; -1]$$

$$\Rightarrow x=-3 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(-3|-3) \quad x=-1 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(-1|1)$$

30.2.4



$$30.2.5 \quad \int_0^4 (f(x) - (x+1)) dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{x+2} \right) dx = \left[\ln|x+2| \right]_0^4 = \ln(6) - \ln(2) = \ln(3) \approx 1,10$$

31

$$\text{Graph 1: } f(x) = \frac{x-2}{x^3} \quad \text{Graph 2: } f'(x) = \frac{-2x+6}{x^4}$$

$$\text{Graph 3: } F(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \quad \text{Graph 4: } h(x) = 0,002 \cdot \frac{x^3}{x-2}$$

Die Nullstelle von Graph 1 ist die Unendlichkeitsstelle von 4 und die Extremstelle des Graphen 3. Graph 2 besitzt bei $x = 3$ eine Nullstelle, dort liegt die Extremstelle von Graph 1.

32

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -3,8 - 5,5 = -9,3$$

Flächenmaßzahl der Fläche zwischen G_f und der x-Achse zwischen -5 bis -1 beträgt 9,3

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c) = 5 - 4,25 = 0,75$$

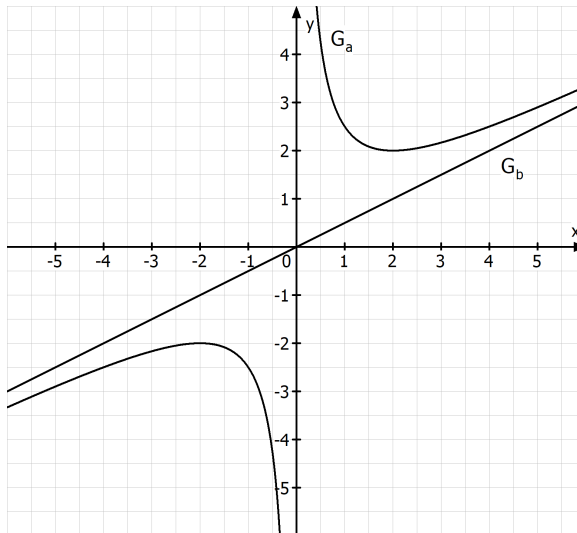
0,75 ist die Flächenbilanz der Flächen zwischen G_f und der x-Achse im Bereich zwischen 1 und 4. Die Teilfläche über der x-Achse ist größer als die Teilfläche unter der x-Achse.

33.1

$$a(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x) + \frac{2}{(-x)} = -\frac{1}{2}x - \frac{2}{x} = -a(x)$$

$\Rightarrow G_a$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

33.2 TIP(2|2) HOP(-2|-2)



33.3

$$y = mx + t \quad a'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

$$m = a'(1) = \frac{1}{2} - \frac{2}{1} = -1,5 \quad a(1) = 2,5$$

$$\Rightarrow 2,5 = -1,5 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow y = -1,5x + 4$$

34

$$c(x) = k \cdot \frac{(x+1) \cdot (x-2)^2}{(x+1) \cdot (x-1)}$$

$$\Rightarrow 5 = k \cdot \frac{-2 \cdot (-5)^2}{-2 \cdot (-4)} \Rightarrow 5 = k \cdot \frac{-50}{8} \Rightarrow k = -0,8$$

35.1

$$\text{Asymptote: } x^2 : (x-1) = x+1 + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}$$

$$\Rightarrow y = x+1$$

$$\text{Nullstelle: } f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

35.2

Maximale Monotonieintervalle:

$$G_f \text{ smf in }]-\infty; 0] \text{ sowie in } [2; \infty[\quad G_f \text{ smf in } [0; 1[\text{ sowie in }]1; 2]$$

$$W_f =]-\infty; 0] \cup [4; \infty[$$

36.1

Definitionsmenge:

$$-2x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (-2x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 = 2 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow D_h = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$$

Nullstellen:

$$h(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x - 2) = 0 \Rightarrow (x_1 = 0) \notin D_h \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

Art der Definitionslücken:

$$x = -\sqrt{2} \text{ Polstelle 1. Ordnung} \quad x = 0 \text{ stetige behebbare Definitionslücke}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ Polstelle 1. Ordnung}$$

$$36.2 \quad 1) x = -\sqrt{2} \quad 2) x = \sqrt{2} \quad 3) y = 0 \text{ (Zählergrad < Nennergrad)}$$

36.3.1

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

$$g(x) = \frac{x \cdot (3x - 2)}{x \cdot (-2x^2 + 4)} = \frac{3x - 2}{-2x^2 + 4} = f(x)$$

36.3.2

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (-2x^2 + 4) - (3x - 2) \cdot (-4x)}{(-2x^2 + 4)^2} = \frac{-6x^2 + 12 + 12x^2 - 8x}{(-2x^2 + 4)^2} = \frac{6x^2 - 8x + 12}{(-2x^2 + 4)^2}$$

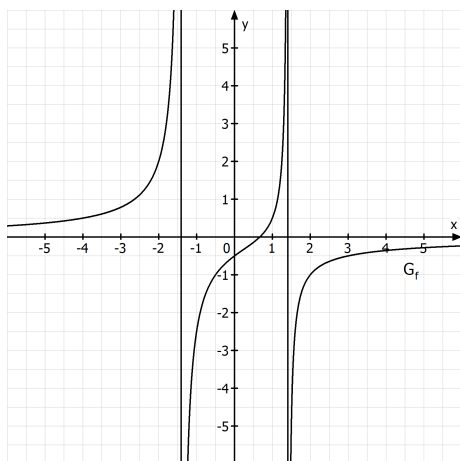
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 12 = 0 \text{ keine Lösung}$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze von $(6x^2 - 8x + 12)$:

$$\Rightarrow G_f \text{ sms in }]-\infty; -\sqrt{2}[\text{ sowie in }]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[\text{ sowie in }]\sqrt{2}; \infty[$$

36.3.3



36.3.4

x	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25
$f'(x)$	1,43	0,96	0,75	0,69	0,78	1,13	2,50	14,86

Die Tangentensteigungen nehmen bis $x = 0,25$ ab und dann wieder zu, d.h. der Wendepunkt liegt zwischen $x = 0,25$ und $x = 0,5$ und muss im IV. Quadranten liegen, weil die Nullstelle von f bei $x = \frac{2}{3}$ liegt.

37

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \quad (x_2 = 2) \notin D_g$$

$x = 2$ stetig behebbare Definitionslücke $x = 0$ Polstelle 1. Ordnung

Senkrechte Asymptote: $x = 0$ Waagrechte Asymptote: $y = -1$

38.1

Nullstelle: $f(x)=0 \Rightarrow 6x+12=0 \Rightarrow x=-2$

Asymptote: $y=0$ wegen Zählergrad < Nennergrad

$$x \rightarrow +\infty \quad \frac{\overbrace{6x+12}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{x^2+4x+6}_{\rightarrow +\infty}} \rightarrow 0_+ \quad G_f \text{ nähert sich von oben an } y=0 \text{ an}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad \frac{\overbrace{6x+12}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{x^2+4x+6}_{\rightarrow +\infty}} \rightarrow 0_- \quad G_f \text{ nähert sich von unten an } y=0 \text{ an}$$

38.2

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (x^2+4x+6) - (6x+12)(2x+4)}{(x^2+4x+6)^2} = \frac{6x^2+24x+36-12x^2-48x-48}{(x^2+4x+6)^2} = \frac{-6x^2-24x-12}{(x^2+4x+6)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -6x^2-24x-12=0 \Rightarrow x_1=-2-\sqrt{2} \approx -3,41 \quad x_2=-2+\sqrt{2} \approx -0,59$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze von $(-6x^2-24x-12)$:

$$\Rightarrow x_1=-3,41 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(-3,41|-2,12) \quad x_2=-0,59 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(-0,59|2,12)$$

38.3

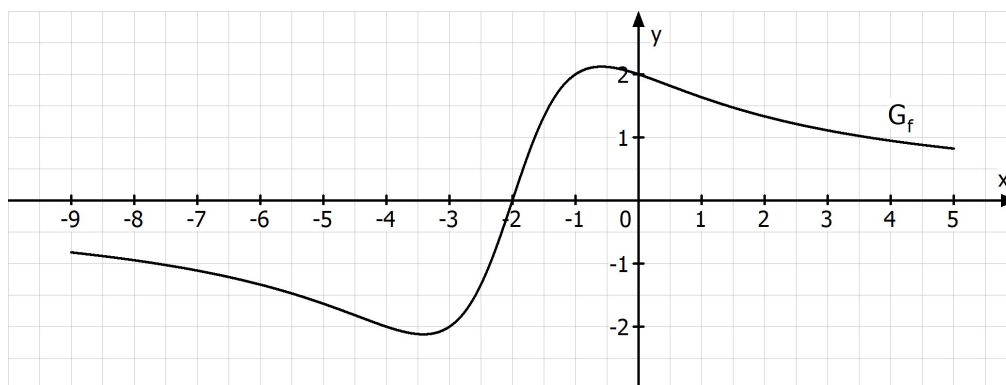
$$f''(x)=0 \Rightarrow 12(x+2)(x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6})=0$$

$$\Rightarrow x_1=-2 \quad x_2=-2-\sqrt{6} \quad x_3=-2+\sqrt{6}$$

x_1, x_2 und x_3 sind einfache Nullstellen von $f'' \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow \text{Wendestellen}$

$$\text{WP}_1(-2|0) \quad \text{WP}_2(-4,45|-1,84) \quad \text{WP}_3(0,45|1,84)$$

38.4



39.1

$$x \rightarrow 0^- \quad \frac{\overbrace{-x^2 - x - 1}^{-1}}{\underbrace{x}_{\rightarrow 0_-}} \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow 0^+ \quad \frac{\overbrace{-x^2 - x - 1}^{-1}}{\underbrace{x}_{\rightarrow 0_+}} \rightarrow -\infty$$

Asymptoten: 1) $x=0$ 2) $(-x^2 - x - 1): x = -x - 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = -x - 1$
 $\rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$

39.2

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)(-1)}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{-2} \quad (f)$$

$\Rightarrow f$ hat keine Nullstellen

39.3

$$f'(x) = \frac{(-2x-1) \cdot x - (-x^2 - x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{-2x^2 - x + x^2 + x + 1}{x^2} = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

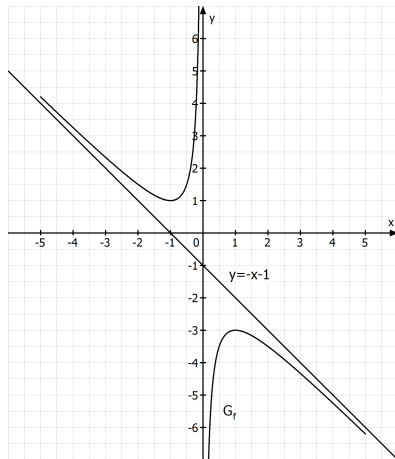
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ TIP } \text{TIP}(-1|1) \quad x_2 = 1 \text{ HOP } \text{HOP}(1|-3)$$

$$\Rightarrow G_f \text{ smf in }]-\infty; 1] \text{ sowie in } [1; \infty[\quad G_f \text{ sms in } [-1; 0[\text{ sowie in }]0; 1]$$

39.4



40.1

$$p(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{4 - (-x)^2} = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = p(x)$$

$\Rightarrow G_p$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

40.2

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$p(0) = \frac{0^2 - 1}{4 - 0^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow S_y \left(0 \mid -\frac{1}{4} \right)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$p(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \Rightarrow N_1(-1 \mid 0) \quad N_2(1 \mid 0)$$

$x = 2$ Polstelle 1. Ordnung $x = -2$ Polstelle 1. Ordnung

Asymptoten:

- 1) $x = -2$ senkrechte Asymptote
- 2) $x = 2$ senkrechte Asymptote
- 3) $y = -1$ waagrechte Asymptote

40.3

$$p'(x) = \frac{2x \cdot (4 - x^2) - (x^2 - 1) \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{8x - 2x^3 + 2x^3 - 2x}{(4 - x^2)^2} = \frac{6x}{(4 - x^2)^2}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{12} \\ \overset{<}{x \rightarrow 2} \quad \frac{6x}{\underbrace{(4 - x^2)^2}_{\rightarrow 0_+}} \rightarrow +\infty \end{array} \Rightarrow \text{Abbildung a)}$$

41.1

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad (f)$$

$\Rightarrow f$ hat keine Nullstellen

$$x \rightarrow 2^- \quad \frac{\overbrace{x^2 - 4x + 8}^{\rightarrow 4}}{\underbrace{-2x + 4}_{\rightarrow 0^+}} \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow 2^+ \quad \frac{\overbrace{x^2 - 4x + 8}^{\rightarrow 4}}{\underbrace{-2x + 4}_{\rightarrow 0^-}} \rightarrow -\infty$$

$\Rightarrow x=2$ Polstelle 1. Ordnung

41.2

1) $x=2$ senkrechte Asymptote

$$2) \quad (x^2 - 4x + 8) : (-2x + 4) = -0,5x + 1 + \frac{4}{\underbrace{-2x + 4}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}}$$

$y = -0,5x + 1$ schiefe Asymptote

41.3

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(-2x+4) - (x^2-4x+8)(-2)}{(-2x+4)^2} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 8x + 8x - 16 + 2x^2 - 8x + 16}{(-2x+4)^2} = \frac{-2x^2 + 8x}{(-2x+4)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x(-2x+8)=0 \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=4$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

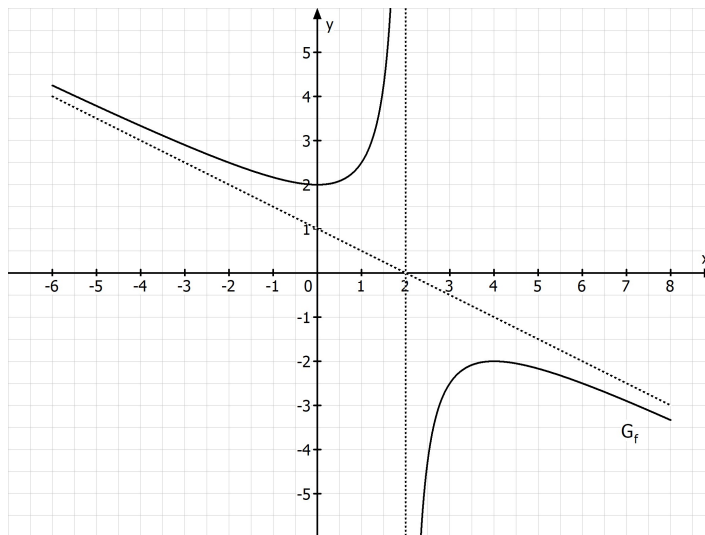
Skizze von $(-2x^2 + 8x)$:

G_f smf in $]-\infty; 0]$ sowie in $[4; \infty[$

G_f sms in $[0; 2[$ sowie in $]2; 4]$

$\Rightarrow x=0$ TIP TIP(0|2) $x=4$ HOP HOP(4|-2)

41.4

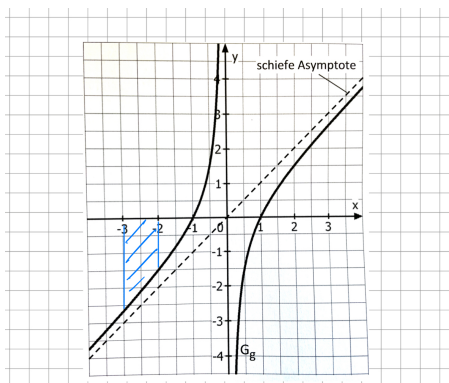


42.1

Nullstellen: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

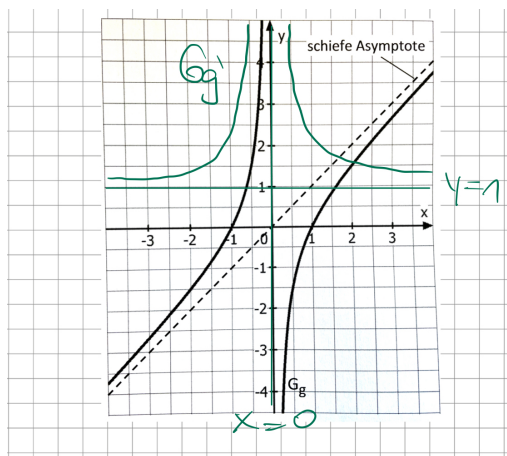
Asymptoten: $x=0$ $y=x$

42.2



42.3 G_g nähert sich für $x \rightarrow \pm\infty$ der schiefen Asymptote mit der Steigung 1 an

G_g nähert sich für $x \rightarrow \pm\infty$ $y = 1$ an.



42.4

Aussage	wahr	falsch
G_G besitzt ein relatives Maximum an der Stelle $x = -1$.		X
G_G ist streng monoton steigend im Intervall $]-\infty; 0[$.		X
G_G ist linksgekrümmt im Intervall $]0; +\infty[$.	X	
$G(3) - G(1) < 5$	X	

43.1

Definitionsmenge: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \quad x_3 = 1$$

Art der Definitionslücken: $x = -2$ (Polstelle 1.Ordnung) $x = 2$ (Polstelle 1.Ordnung)

43.2

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{4 - (-x)^2} = \frac{-x^3 + x}{4 - x^2} = \frac{-(x^3 - x)}{4 - x^2} = -f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

$$\Rightarrow H_2(-0,61 | 0,11) \quad T_2(-3,26 | 4,74)$$

43.3

$$(x^3 - x) : (-x^2 + 4) = -x + \underbrace{\frac{3x}{-x^2 + 4}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty} \quad y = -x \text{ (schiefe Asymptote)}$$

$$x = -2 \text{ (senkrechte Asymptote)} \quad x = 2 \text{ (senkrechte Asymptote)}$$

43.4

$N(1 | 0)$ siehe 43.0

$$y = mx + t \quad m = f'(1)$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)(4 - x^2) - (x^3 - x) \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{12x^2 - 4 - 3x^4 + x^2 + 2x^4 - 2x^2}{(4 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 11x^2 - 4}{(4 - x^2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-1 + 11 - 4}{(4 - 1)^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{2}{3} \cdot 1 + t \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

43.5

$$f^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow 72(x^5 + 40x^3 + 80x) = 0 \Rightarrow x^5 + 40x^3 + 80x = 0 \Rightarrow x(x^4 + 40x^2 + 80) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x^4 + 40x^2 + 80 = 0 \quad \text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow z^2 + 40z + 80 = 0 \quad z_{1/2} = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 1 \cdot 80}}{2} = \frac{-40 \pm \sqrt{1280}}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = -20 - 8\sqrt{5} \approx -37,89 \quad z_2 = -20 + 8\sqrt{5} \approx -2,11$$

Resubstitution: $x^2 = -37,89$ geht nicht $x^2 = -2,11$ geht nicht

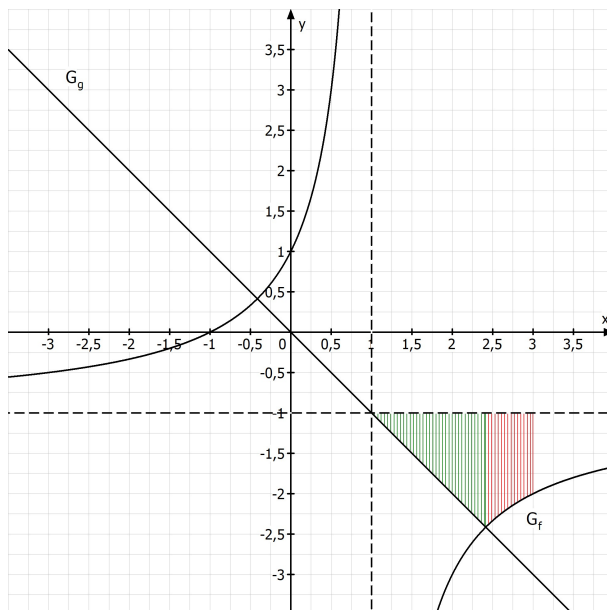
$$f^{(5)}(x) = \frac{360(x^6 + 60x^4 + 240x^2 + 64)}{(4 - x^2)^6}$$

44.1 1) $y = -1$ waagrechte Asymptote 2) $x = 1$ senkrechte Asymptote

44.2/44.3

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = -x \Rightarrow x+1 = -x+x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2} \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}$$



45.1

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$$

$$(x^3 - 3x + 2) : (x + 2) = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

45.2 $x_1 = -2$ (einfach) $x_2 = 1$ (doppelt)

45.3 $x = 0$ senkrechte Asymptote $y = x$ schiefe Asymptote

45.4

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3) \cdot x^2 - (x^3 - 3x + 2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{(3x^2 - 3) \cdot x - (x^3 - 3x + 2) \cdot 2}{x^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 3x - 2x^3 + 6x - 4}{x^3} = \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$(x^3 + 3x - 4) : (x - 1) = x^2 + x + 4$$

$$x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

Skizze von f' :

Skizze Zähler :

Skizze Nenner :

$$G_f \text{ s.m.s in }]-\infty; 0[\text{ sowie in } [1; \infty[$$

$$G_f \text{ s.m.f in }]0; 1]$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ TIP}$$

46.1

$$h(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 6} = \frac{x^2}{x^2 + 6} = h(x) \quad D_h \text{ ist symmetrisch zu } x = 0$$

$$\Rightarrow G_h \text{ ist achsensymmetrisch zur y-Achse}$$

46.2

$$h'(x) = \frac{(x^2+6) \cdot 2x - x^2 \cdot 2x}{(x^2+6)^2} = \frac{2x^3+12x-2x^3}{(x^2+6)^2} = \frac{12x}{(x^2+6)^2}$$

$$h''(x) = \frac{12 \cdot (x^2+6)^2 - 12x \cdot 2(x^2+6) \cdot 2x}{(x^2+6)^4} = \frac{12 \cdot (x^2+6) - 12x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+6)^3} =$$

$$= \frac{12x^2+72-48x^2}{(x^2+6)^3} = \frac{-36x^2+72}{(x^2+6)^3}$$

$$h''(x) = 0 \Rightarrow -36x^2 + 72 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}$$

Skizze von h'' : Nenner in D_h immer positiv

Skizze von $(-36x^2 + 72)$:

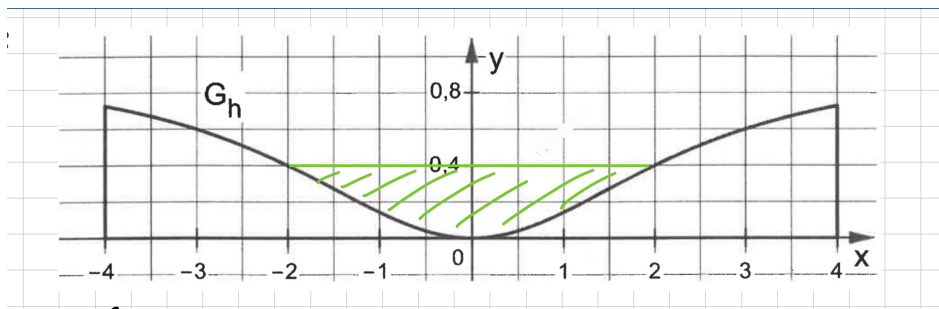
$$\Rightarrow x_2 = \sqrt{2} \text{ Maximum der Steigung}$$

$$\Rightarrow h'(-4) \approx -0,1 \quad h'(\sqrt{2}) \approx 0,2652$$

$$\Rightarrow \text{absolute maximale Steigung bei } x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 26,52\% < 30\% \Rightarrow \text{Verordnung wird eingehalten}$$

46.3 Etwa 9 Kästchen $\Rightarrow A \approx 9 \cdot 0,5 \cdot 0,2 \approx 0,9 \quad \Rightarrow V = 0,9 \cdot 10 = 9 \text{ m}^3$



47.1

$$f(-x) = \frac{-(-x)^2 - 5}{(-x)^3 - 5(-x)} = \frac{-x^2 - 5}{-x^3 + 5x} = -\frac{-x^2 - 5}{x^3 - 5x} = f(x)$$

D_f symmetrisch zu $x = 0 \Rightarrow G_f$ punktsymmetrisch zum Ursprung

47.2

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot (x^3 - 5x) - (-x^2 - 5) \cdot (3x^2 - 5)}{(x^3 - 5x)^2} = \frac{-2x^4 + 10x^2 + 3x^4 - 5x^2 + 15x^2 - 25}{(x^3 - 5x)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 20x^2 - 25}{(x^3 - 5x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 20x^2 - 25 = 0 \quad \text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow z^2 + 20z - 25 = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 1 \cdot (-25)}}{2} = \frac{-20 \pm \sqrt{500}}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = -10 + 5\sqrt{5} \quad z_2 = -10 - 5\sqrt{5}$$

$$1) x^2 = -10 + 5\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{-10 + 5\sqrt{5}} \quad x_2 = \sqrt{-10 + 5\sqrt{5}}$$

$$2) x^2 = -10 - 5\sqrt{5} \text{ geht nicht}$$

47.3

G_f sms in $]-\infty; x_3[$ G_f sms in $]x_3; x_1[$ G_f smf in $[x_1; 0[$

G_f smf in $]0; x_2[$ G_f sms in $[x_2; x_4[$ G_f sms in $]x_4; \infty[$

x_1 HOP x_2 TIP

48

$$f(x) = \frac{-x(x+2)}{(x+2)(x-2)^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$x = -2$ stetig behebbare Definitionslücke

$x = 2$ Polstelle 2. Ordnung

Nullstelle: $x_1 = 0$

Asymptoten: $x = 2$ senkrechte Asymptote $y = 0$ waagrechte Asymptote

49.1

Terme	< 0	= 0	> 0
$g'(0)$		✗	
$g''(0)$	✗		
$\int_{-1}^1 g(x) dx$			✗

49.2

$$h(x) = \frac{1}{g(x)} \quad g(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$j(x) = x^2 \cdot e^{g(x)} \quad \text{für } x^2 \text{ und } e^x \text{ gilt } D = \mathbb{R} \Rightarrow D_j = \mathbb{R}$$

50.1

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$x = 3$$

$$f(0) = \frac{(0+1)(0-2)}{2 \cdot 0 + 6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_y \left(0 \mid \frac{1}{3} \right)$$

50.2

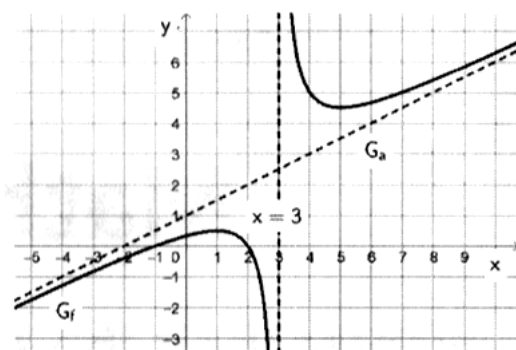
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}$$

$$(x^2 - x - 2) : (2x - 6) = \frac{1}{2}x + 1 + \underbrace{\frac{4}{2x - 6}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{schräge Asymptote}$$

$$x \rightarrow +\infty \quad \frac{4}{2x - 6} \rightarrow 0_+$$

G_f nähert sich von oben an die schräge Asymptote an.



50.3

Aussage	w	f	n. e.
G_F ist streng monoton steigend in $]-\infty; 1]$.		X	
G_F hat bei $x = 2$ einen relativen Hochpunkt.	X		
Der Wert $\int_{-2}^2 f(x) dx$ ist negativ.		X	
Wenn $x \rightarrow +\infty$, dann $F(x) \rightarrow 0,5$.		X	
G_F verläuft durch den Koordinatenursprung.			X

51.1

$$g(x) = a \cdot \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

einfache Nullstelle bei $x = -1$ und Polstelle 2. Ordnung bei $x = 2$

$$P(0|10) \Rightarrow 10 = a \cdot \frac{0+1}{(0-2)^2} \Rightarrow 10 = \frac{1}{4}a \Rightarrow a = 40$$

$$\Rightarrow g(x) = 40 \cdot \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

51.2

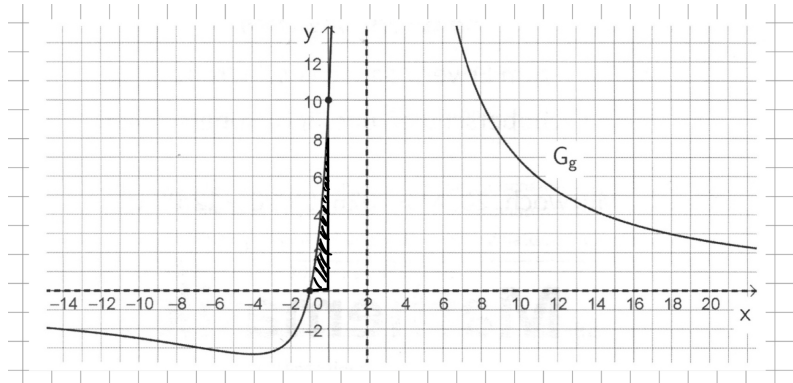
G_g smf in $]-\infty; -4]$ G_g sms in $[-4; 2[$ G_g smf in $]2; \infty[$

G_g rechtsgekrümmt in $]-\infty; -7]$

G_g linksgekrümmt in $[-7; 2[$

G_g rechtsgekrümmt in $]2; \infty[$

51.3



$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^0 g(x) dx = \left[40 \left(\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} \right) \right]_{-1}^0 = \\
 &= 40 \left(\ln(2) - \frac{3}{-2} \right) - 40 \left(\ln(3) - \frac{3}{-3} \right) = \\
 &= 40 (\ln(2) + 1,5) - 40 (\ln(3) + 1) \approx 87,73 - 83,94 \approx 3,79
 \end{aligned}$$

52.1

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 0 \Rightarrow 2x^2 - 36x + 178 = 0 \\
 \Rightarrow x_{1/2} &= \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 2 \cdot 178}}{2 \cdot 2} = \frac{36 \pm \sqrt{-128}}{4} \\
 \Rightarrow p &\text{ hat keine Nullstellen} \\
 x \rightarrow \pm\infty \quad \frac{2x^2 - 36x + 178}{x^2 - 16x + 73} &\rightarrow 2 \quad \text{Zählergrad} = \text{Nennergrad} \\
 \Rightarrow &\text{waagrechte Asymptote bei } y = 2
 \end{aligned}$$

52.2

$$p'(x) = \frac{(4x-36)(x^2-16x+73) - (2x^2-36x+178)(2x-16)}{(x^2-16x+73)^2} =$$

$$= \frac{(4x^3-64x^2+292x-36x^2+576x-2628) - (4x^3-32x^2-72x^2+576x+356x-2848)}{(x^2-16x+73)^2} =$$

$$= \frac{4x^2-64x+220}{(x^2-16x+73)^2} = \frac{4(x^2-16x+55)}{(x^2-16x+73)^2}$$

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 4(x^2-16x+55) = 0 \Rightarrow x^2-16x+55$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{256-4 \cdot 1 \cdot 55}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{16 \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 11 \quad x_2 = 5$$

Skizze von p' : Nenner immer positiv

Skizze von $4(x^2-16x+55)$:

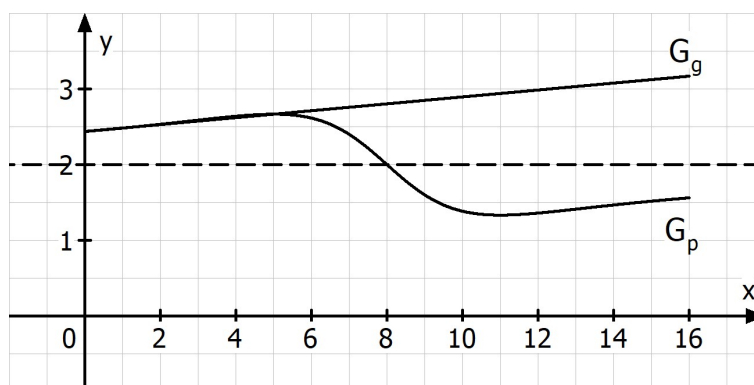
$$\Rightarrow x_1 = 11 \text{ TIP} \quad \text{TIP} \left(11 \mid \frac{4}{3} \right) \quad x_2 = 5 \text{ HOP} \quad \text{HOP} \left(5 \mid \frac{8}{3} \right)$$

Da sich G_p für $x \rightarrow \pm\infty$ $y = 2$ annähert, es keine

Definitionslücken gibt und der y -Wert des TIP < 2 und der

y -Wert des HOP > 2 ist, müssen die Extrempunkte absolut sein

52.3



52.4.1 Nach 5 Stunden wurden die Schleusen geöffnet, die beobachteten Pegelstände lagen

zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{8}{3}$.

52.4.2

$$\begin{aligned} p(x) &= 2,5 \Rightarrow 2x^2 - 36x + 178 = 2,5(x^2 - 16x + 73) \\ \Rightarrow 2x^2 - 36x + 178 &= 2,5x^2 - 40x + 182,5 \Rightarrow -0,5x^2 + 4x - 4,5 = 0 \\ \Rightarrow x_{1/2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-4,5)}}{-1} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{-1} \\ \Rightarrow x_1 &\approx 1,35 \quad x_2 \approx 6,65 \end{aligned}$$

Die erste Hochwasserwarnung wurde nach 1,35 Stunden herausgegeben.

52.5

$$\begin{aligned} A \left(0 \mid \frac{178}{73} \right) \quad B \left(5 \mid \frac{8}{3} \right) \\ y = mx + t \quad m &= \frac{\frac{178}{73} - \frac{8}{3}}{0 - 5} = \frac{10}{219} \\ \Rightarrow y &= \frac{10}{219}x + t \quad \Rightarrow y = \frac{10}{219}x + \frac{178}{73} \\ \frac{10}{219}x + \frac{178}{73} &= 3 \quad \Rightarrow \frac{10}{219}x = \frac{41}{73} \quad \Rightarrow x \approx 12,3 \end{aligned}$$

Nach etwa 12,3 Stunden wäre mit einer Überschwemmung zu rechnen gewesen.